OBRAS

SOBRE

MATHEMATICA

OBRAS

SOBRE

MATHEMATICA

DO

Dr. F. Gomes Teixeira

DIRECTOR DA ACADEMIA POLYTECHNICA DO PORTO,
ANTIGO PROFESSOR NA UNIVERSIDADE DE COIMBRA, ETC.

PUBLICADAS

POR ORDEM DO GOVERNO PORTUGUÊS

VOLUME SEGUNDO

COIMBRA
Imprensa da Universidade
1906

I

NOTES SUR DEUX TRAVAUX D'ABEL RELATIFS A L'INTÉGRATION DES DIFFÉRENCES FINIES

Niels Henrik Abel in memoriam

(Acta Mathematica, t. XXVIII — Stockolm, 1904)

NOTES SUR DEUX TRAVAUX D'ABEL RELATIFS A L'INTÉGRATION DES DIFFÉRENCES FINIES [1]

I

1. Le premier des travaux d'Abel que nous allons considérer, fut publié dans le *Magazin for Naturvirdenskaberne* (Christiania, t. II, 1823). Dans la troisième partie de ce travail (*Œuvres complètes*, 1881, t. I, pag. 21) donne le grand analyste la formule suivante:

$$(1)\qquad \Sigma\varphi(x) = \int\varphi(x)\,dx - \frac{1}{2}\varphi(x) + \int_0^\infty \frac{\varphi\left(x+\frac{t}{2}i\right) - \varphi\left(x-\frac{t}{2}i\right)}{2i}\cdot\frac{dt}{e^{\pi t}-1} + \mathrm{C},$$

où $\Sigma\varphi(x)$ représente l'intégrale finie de $\varphi(x)$ et C une constante arbitraire, et en fait application à la détermination de quelques intégrales définies, qui avaient été considérées par Legendre dans ses *Exercices de Calcul intégral,* parmi lesquelles se trouve la suivante:

$$(2)\qquad \int_0^\infty \frac{\sin\frac{ut}{2}\,dt}{e^{\pi t}-1} = \frac{1}{e^u-1} - \frac{1}{u} + \frac{1}{2}.$$

C'est de cette formule (1) que nous allons premièrement nous occuper, pour en faire une nouvelle application, en démontrant au moyen d'elle et de (2) la formule qui donne l'expression de la dérivée d'ordre quelconque des fonctions de e^x, connue par le nom de *formule d'Herschell.*

---

(1) Este trabalho foi publicado em um dos volumes das *Acta Mathematica*, consagrados á memoria de Abel, que foram publicados na occasião do primeiro centenario do nascimento d'este grande geometra.

*

Appliquons, pour cela, la formule (1) à la fonction $e^{ux} x^{2n}$, n étant un nombre entier positif et u un nombre quelconque, et remarquons que, au moyen de l'intégration par parties, on trouve

$$\Sigma\, e^{ux} x^{2n} = \frac{e^{ux}}{e^u - 1} x^{2n} - \Sigma \frac{e^{u(x+1)}}{e^u - 1} \Delta x^{2n},$$

et par conséquent

$$\Sigma\, e^{ux} x^{2n} = \frac{e^{ux}}{e^u - 1}\left[x^{2n} - \frac{e^u}{e^u - 1} \Delta x^{2n} + \left(\frac{e^u}{e^u-1}\right)^2 \Delta^2 x^{2n} - \ldots + \left(\frac{e^u}{e^u-1}\right)^{2n} \Delta^{2n} x^{2n}\right].$$

En posant alors

$$\mathrm{P} = x^{2n} - \binom{2n}{2} \frac{x^{2n-2}}{2^2} t^2 + \ldots + (-1)^n \frac{1}{2^{2n}} t^{2n},$$

$$\mathrm{Q} = 2n \frac{x^{2n-1}}{2} t - \binom{2n}{3} \frac{x^{2n-3}}{2^3} t^3 + \ldots,$$

on trouve

$$\int_0^\infty \left(\mathrm{P} \sin \frac{ut}{2} + \mathrm{Q} \cos \frac{ut}{2}\right) \frac{dt}{e^{\pi t} - 1} = \frac{1}{e^u - 1}\left[x^{2n} - \frac{e^u}{e^u-1} \Delta x^{2n} + \ldots + \left(\frac{e^u}{e^u-1}\right)^{2n} \Delta^{2n} x^{2n}\right]$$
$$- \left[\frac{x^{2n}}{u} - \frac{2n x^{2n-1}}{u^2} + \ldots + \frac{1.2\ldots 2n}{u^{2n+1}}\right] + \frac{1}{2} x^{2n} + \mathrm{C} e^{-ux}.$$

Les coefficients des mêmes puissances de x dans les deux membres de cette identité doivent être égaux. En considérant premièrement ceux de x^{2n} on trouve l'égalité

$$\int_0^\infty \frac{\sin \frac{ut}{2}\, dt}{e^{\pi t} - 1} = \frac{1}{e^u - 1} - \frac{1}{u} + \frac{1}{2} + \frac{u^{2n}}{1.2\ldots 2n} \mathrm{C},$$

qui, à cause de la formule (2), fait voir que $\mathrm{C} = 0$. Et, en y posant ensuite $x = 0$, il vient

$$\int_0^\infty \frac{t^{2n} \sin \frac{ut}{2}\, dt}{e^{\pi t} - 1} = (-1)^{n+1} \frac{2^{2n} e^u}{(e^u - 1)^2}\left[\Delta 0^{2n} - \frac{e^u}{e^u - 1} \Delta^2 0^{2n}\right.$$
$$\left. + \ldots - \left(\frac{e^u}{e^u - 1}\right)^{2n-1} \Delta^{2n} 0^{2n}\right] + (-1)^{n+1} 2^{2n} \frac{1.2\ldots 2n}{u^{2n+1}}.$$

En appliquant la formule (1) à la fonction $x^{2n-1} e^{ux}$, on trouve de la même manière

$$\int_0^\infty \frac{t^{2n-1} \cos \frac{ut}{2} dt}{e^{\pi t}-1} = (-1)^n \frac{2^{2n-1} e^u}{(e^u-1)^2} \left[\Delta 0^{2n-1} - \frac{e^u}{e^u-1} \Delta^2 0^{2n-1} + \ldots + \left(\frac{e^u}{e^u-1}\right)^{2n-2} \Delta^{2n-1} 0^{2n-1} \right] - (-1)^n 2^{2n-1} \frac{1.2\ldots(2n-1)}{u^{2n}}.$$

Mais, d'un autre côté, en dérivant les deux membres de l'égalité (2), par rapport à u, $2n-1$ et $2n$ fois, on trouve

$$\int_0^\infty \frac{t^{2n-1} \cos \frac{ut}{2} dt}{e^{\pi}-1} = (-1)^{n-1} 2^{2n-1} \left[\frac{1.2\ldots(2n-1)}{u^{2n}} + \frac{d^{2n-1}(e^u-1)^{-1}}{du^{2n-1}} \right],$$

$$\int_0^\infty \frac{t^{2n} \sin \frac{ut}{2} dt}{e^{\pi t}-1} = (-1)^{n+1} 2^{2n} \left[\frac{1.2\ldots 2n}{u^{2n+1}} - \frac{d^{2n}(e^u-1)^{-1}}{du^{2n}} \right].$$

De ces deux égalités et des deux précédentes on tire la suivante:

$$\frac{d^m (e^u-1)^{-1}}{du^m} = -\frac{e^u}{(e^u-1)^2} \left[\Delta 0^m - \frac{e^u}{e^u-1} \Delta^2 0^m + \ldots \pm \left(\frac{e^u}{e^u-1}\right)^{m-1} \Delta^m 0^m \right].$$

Maintenant il n'a qu'un pas à donner pour obtenir la dérivée d'ordre m de $y=f(e^u)$ par rapport à u. Il suffit qu'on forme quelques dérivées successives de $f(e^u)$ pour remarquer qu'on a

$$y^{(m)} = f'(e^u) e^u + \mathrm{A} f''(e^u) e^{2u} + \mathrm{B} f'''(e^u) e^{3u} + \ldots + f^{(m)}(e^u) e^{mu},$$

A, B, ... étant des nombres, qui ne dépendent pas de la fonction considérée, et qu'on peut, par conséquent, obtenir au moyen d'une fonction particulière. En appliquant, pour cela, cette formule à la fonction $(e^u-1)^{-1}$, on trouve

$$y^{(m)} = -\frac{e^u}{(e^u-1)^2} \left[1 - 1.2\mathrm{A} \frac{e^u}{e^u-1} + 1.2.3\mathrm{B} \left(\frac{e^u}{e^u-1}\right)^2 - \ldots \pm 1.2\ldots m \left(\frac{e^u}{e^u-1}\right)^{m-1} \right].$$

On a donc

$$\mathrm{A} = \frac{1}{1.2} \Delta^2 0^m, \quad \mathrm{B} = \frac{1}{1.2.3} \Delta^3 0^m, \quad \mathrm{C} = \frac{1}{1.2.3.4} \Delta^4 0^m, \quad \ldots,$$

et, par conséquent,

$$y^{(m)} = f'(e^u)\,e^u + \frac{\Delta^2\,0^m}{1.2} f''(e^u)\,e^{2u} + \frac{\Delta^3\,0^m}{1.2.3} f'''(e^u)\,e^{3u} + \ldots + f^{(m)}(e^u)\,e^{mu},$$

qui est la *formule d'Herschell.*

II

2. Le second travail d'Abel, que nous allons considérer, fut publié pour la première fois après sa mort, et se trouve dans le tome II, p. 1, des *Œuvres complètes.* Il y donne la représentation de l'intégrale finie $\Sigma \frac{1}{x^\alpha}$ par une intégrale définie, au moyen de laquelle il l'étudie. Ici nous allons étudier la même fonction en prenant pour point de départ une série qui la représente, et en appliquant les méthodes da la théorie des fonctions analytiques.

Considérons la série

$$(1) \qquad \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{1}{m^\alpha} - \frac{1}{(m+x)^\alpha}\right],$$

où α représente un nombre positif quelconque, laquelle contient comme cas particulier quelques-unes qu'on trouve dans la théorie de la fonction $\Gamma(x)$, qui correspondent aux valeurs entières de α, et supposons que m^α représente une quelconque des valeurs que prend z^α, quand $z = m$, et qu'on détermine $(m+x)^\alpha$ par la condition de se réduire à la valeur choisie pour m^α, quand $x = 0$.

Cela posé, nous allons démontrer que la série considérée est *uniformément convergente* dans une aire A, limitée par un contour quelconque, laquelle ne contienne aucun des points d'affixes $-1, -2, -3, \ldots$

Pour cela nous remarquerons premièrement que, si n est le premier nombre entier supérieur à la plus grande des valeurs que prend le module de x dans l'aire A, il suffit qu'on démontre qu'est uniformément convergente dans cette aire la série

$$\sum_{m=n+1}^{\infty} \left[\frac{1}{m^\alpha} - \frac{1}{(m+x)^\alpha}\right],$$

ou

$$\sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{m^\alpha \left[\left(1+\frac{x}{m}\right)^\alpha - 1\right]}{m^\alpha (m+x)^\alpha}$$

ou

$$\sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{\lambda x\left(1+\theta\frac{x}{m}\right)^{\alpha-1}}{m(m+x)^{\alpha}},$$

où $\lambda \overline{\overline{<}} 1$, $0<\theta<1$.

Or il est facile de voir qu'il existe un nombre M, que le módule de $\lambda x\left(1+\theta\frac{x}{m}\right)^{\alpha-1}$ ne peut pas surpasser, quand x varie, sans sortir de l'aire A, et m prend les valeurs $n+1$, $n+2$, ... En effet, si $\alpha>1$, on a

$$\left|1+\theta\frac{x}{m}\right|^{\alpha-1} \overline{\overline{<}} \left(1+\theta\left|\frac{x}{m}\right|\right)^{\alpha-1} < 2^{\alpha-1}$$

quand $m>n$ et $|x|<n$; et, si $\alpha<1$, on a, en supposant encore $m>n$ et $|x|<n$,

$$\left|1+\theta\frac{x}{m}\right|^{1-\alpha} > \left(1+\theta\left|\frac{x}{m}\right|\right)^{1-\alpha} > 1-\frac{n}{n+1}$$

et par conséquent $\left|1+\theta\frac{x}{m}\right|^{\alpha-1} < n+1$.

Nous avons donc

$$\left|\frac{\lambda x\left(1+\theta\frac{x}{m}\right)^{\alpha-1}}{m(m+x)^{\alpha}}\right| < \frac{M}{m\,|m+x|^{\alpha}} < \frac{M}{m(m-|x|)^{\alpha}} < \frac{M}{(m-n)^{\alpha+1}}.$$

Mais la série

$$\sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{M}{(m-n)^{\alpha+1}}$$

est convergente. La série (1) est donc *uniformément convergente dans l'aire considérée* A, et elle définit, par conséquent, une fonction $L_1(x)$, que nous allons étudier.

3. Soit x_0 l'affixe d'un point quelconque de l'aire A. Chacun des termes de la série (1) peut être développé en série ordonnée suivant les puissances entières et positives de $x-x_0$, convergente à l'intérieur d'un cercle dont le centre est le point d'affixe x_0 et dont le rayon R est égal ou supérieur à la distance de ce point à celui des points d'affixe -1, -2, -3, ... qui en est plus prochain. Mais, d'une autre côté, la série (1) est uniformément convergente dans tout cercle de centre x_0 et de rayon inférieur à R. En appliquant un théorème de Weierstrass bien connu, on voit donc que la fonction définie par la série (1) peut être développée en série ordonnée suivant les puissances de $x - x_0$, convergente à l'intérieur du cercle de rayon R; et que, par conséquent, elle est *regulière* en tous les points différents de -1, -2, -3, ...

Il convient encore remarquer que -1, -2, -3, ... sont des *points critiques* de la fonction considérée et qu'on a

$$L_1(x) = -\frac{1}{(x+n)^\alpha} + P(x+n), \qquad (n = -1, -2, -3, \ldots)$$

$P(x+n)$ répresentant un développement ordonné suivant les puissances de $x+n$ qu'il est facile d'obtenir, et que cette égalité a lieu pour toutes les valeurs de x représentées par les points de l'intérieur d'un cercle dont le centre est le point d'affixe $-n$ et dont le rayon est égal à l'unité.

4. En développant $L_1(x)$ en série ordonnée suivant les puissances de x, on trouve le résultat

$$L_1(x) = \alpha S_{\alpha+1}\, x - \frac{\alpha(\alpha+1)}{1.2} S_{\alpha+2}\, x^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{1.2.3} S_{\alpha+3}\, x^3 - \ldots,$$

en posant

$$S_i = 1 + \frac{1}{2^i} + \frac{1}{3^i} + \frac{1}{4^i} + \ldots,$$

laquelle est convergente à l'intérieur de la circonférence de centre 0 et de rayon égal à l'unité.

On tire de cette égalité les suivantes:

$$L_1'(0) = \alpha S_{\alpha+1}, \quad L_1''(0) = -\alpha(\alpha+1) S_{\alpha+2}, \ \ldots$$

dont nous allons faire usage en cherchant le développement de la même fonction en série ordonnée suivant les puissances de $\dfrac{x}{x+2}$.

Pour cela, remarquons, en premier lieu, que la droite tirée par le point d'affixe -1, perpendiculairement à l'axe des abscisses, divise le plan de représentation des x en deux demi-plans et que, dans celui qui contient le point d'affixe 0, la fonction $L_1(x)$ est holomorphe. En appliquant maintenant un théorème que nous avons démontré dans le *Journal de Crelle*

(t. CXXII, p. 98), on conclut que la fonction $L_1(x)$ peut être développée en série de la forme

$$L_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(\frac{x}{x+2}\right)^n,$$

convergente dans ce demi-plan. On détermine A_n au moyen de la formule

$$A_n = \frac{1}{1.2\ldots n}\left[\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(L_1'(x)(x+2)^n\right)\right]_{x=0},$$

qui donne

$$A_n = 2L_1'(0) + (n-1)\frac{2^2}{1.2}L_1''(0) + \binom{n-1}{2}\frac{2^3}{1.2.3}L_1'''(0) + \ldots + \frac{2^n}{1.2\ldots n}L_1^{(n)}(0),$$

ou

$$A_n = 2\alpha S_{\alpha+1} - (n-1)\frac{2^2}{1.2}\alpha(\alpha+1)S_{\alpha+2} + \binom{n-1}{2}\frac{2^3}{1.2.3}\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)S_{\alpha+3}$$
$$-\ldots \pm \frac{2^n}{1.2\ldots n}\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)S_{\alpha+n}.$$

5. En dérivant n fois la série (1) par rapport à x, il vient

$$L_1^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(m+x)^{\alpha+n}}.$$

Donc entre la dérivée d'ordre n de $L_1(x, \alpha)$ et la fonction $L_1(x, \alpha+n)$ existe la rélation

$$L_1^{(n)}(x, \alpha) = (-1)^n\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\left[L_1(x, \alpha+n) - \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^{\alpha+n}}\right].$$

6. Nous avons supposé jusqu'ici que les binômes qui entrent dans la série (1) sont des branches quelconques des fonctions qu'ils représentent. En nous plaçant maintenant dans un point de vue plus particulier, nous supposerons qu'on choisit les valeurs des quantités 1^α, 2^α, 3^α, ..., qui entrent dans cette série, de manière qu'elles coïncident avec celles que prend, dans les points d'affixe 1, 2, 3, ..., une branche uniforme de la fonction x^α, déterminée par une certaine valeur initiale et par une coupure, qui parte du point d'affixe 0 et où B, C, ..., L, M_1, M_2, ..., M_m représentent des constantes. On obtient la constante M_m, la seule qu'il nous faut connaître, en déterminant la vraie valeur de la fraction

$$\frac{X'(x-\alpha)}{2(m-1)X}$$

quand $x=\alpha$; on a alors

$$M_m = \lim_{x=\alpha} \frac{X'(x-\alpha)}{2(m-1)X} = \frac{1}{2(m-1)}.$$

Donc la formule (1) donne

$$\frac{2m-3}{2(m-1)}\int\frac{dx}{(x-\alpha)^m\sqrt{X}} = -\frac{1}{(m-1)(x-\alpha)^{m-1}\sqrt{X}}$$
$$-B\int\frac{dx}{(x-\beta)\sqrt{X}} - C\int\frac{dx}{(x-\gamma)\sqrt{X}} - \ldots - L\int\frac{dx}{(x-\lambda)\sqrt{X}}$$
$$-M_1\int\frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{X}} - M_2\int\frac{dx}{(x-\alpha)^2\sqrt{X}} - \ldots - M_{m-1}\int\frac{dx}{(x-\alpha)^{m-1}\sqrt{X}}.$$

Au moyen de cette formule et des formules analogues qu'on obtient en y posant $m=2, 3, \ldots, m-1$, on ramène encore l'étude de l'intégrale $\int\frac{dx}{(x-\alpha)^m\sqrt{X}}$ à celle des intégrales

$$\int\frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{X}}, \int\frac{dx}{(x-\beta)\sqrt{X}}, \ldots, \int\frac{dx}{(x-\lambda)\sqrt{X}},$$

quand $a=\alpha$.

Déterminons maintenant les intégrales

$$\int\frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{X}}, \int\frac{dx}{(x-\beta)\sqrt{X}}, \ldots, \int\frac{dx}{(x-\lambda)\sqrt{X}}.$$

De l'identité

$$\frac{1}{x-\alpha}+\frac{1}{x-\beta}+\ldots+\frac{1}{x-\lambda}=\frac{X'}{X}$$

on tire

$$(2) \qquad \int\frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{X}}+\int\frac{dx}{(x-\beta)\sqrt{X}}+\ldots+\int\frac{dx}{(\alpha-\lambda)\sqrt{X}} = -\frac{2}{\sqrt{X}}.$$

D'un autre côté, de la formule

$$\int \frac{x^k\,dx}{\sqrt{X}} = \frac{x^{k+1}}{(k+1)\sqrt{X}} + \frac{1}{2(k+1)}\int \frac{x^{k+1}X'\,dx}{X\sqrt{X}}$$

et de la formule

$$\begin{aligned}\frac{x^{k+1}X'}{X} &= \frac{x^{k+1}}{x-\alpha} + \frac{x^{k+1}}{x-\beta} + \ldots + \frac{x^{k+1}}{x-\lambda} \\ &= nx^k + a_1 x^{k-1} + a_2 x^{k-2} + \ldots + a_k \\ &\quad + \frac{\alpha^{k+1}}{x-\alpha} + \frac{\beta^{k+1}}{x-\beta} + \ldots + \frac{\lambda^{k+1}}{x-\lambda}\end{aligned}$$

on tire

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned}&(2k+2-n)\int \frac{x^k\,dx}{\sqrt{X}} - a_1\int \frac{x^{k-1}\,dx}{\sqrt{X}} - \ldots - a_k\int \frac{dx}{\sqrt{X}} \\ &= \frac{2x^{k+1}}{\sqrt{X}} + \alpha^{k+1}\int \frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{X}} + \beta^{k+1}\int \frac{dx}{(x-\beta)\sqrt{X}} + \ldots + \lambda^{k+1}\int \frac{dx}{(x-\lambda)\sqrt{X}}\end{aligned}\right.$$

et, en posant $k = 0, 1, 2, \ldots, n-2$,

$$\begin{aligned}&\alpha\int \frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{X}} + \beta\int \frac{dx}{(x-\beta)\sqrt{X}} + \ldots + \lambda\int \frac{dx}{(x-\lambda)\sqrt{X}} \\ &\qquad = -(n-2)\int \frac{dx}{\sqrt{X}} - \frac{2x}{\sqrt{X}}, \\ &\alpha^2\int \frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{X}} + \beta^2\int \frac{dx}{(x-\beta)\sqrt{X}} + \ldots + \lambda^2\int \frac{dx}{(x-\lambda)\sqrt{X}} \\ &\qquad = -(n-4)\int \frac{xdx}{\sqrt{X}} - a_1\int \frac{dx}{\sqrt{X}} - \frac{2x^2}{\sqrt{X}}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\alpha^{n-1}\int \frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{X}} + \beta^{n-1}\int \frac{dx}{(x-\beta)\sqrt{X}} + \ldots + \lambda^{n-1}\int \frac{dx}{(x-\lambda)\sqrt{X}} \\ &= (n-2)\int \frac{x^{n-2}\,dx}{\sqrt{X}} - a_1\int \frac{x^{n-3}\,dx}{\sqrt{X}} - \ldots - a_{n-2}\int \frac{dx}{\sqrt{X}} - \frac{2x^{n-1}}{\sqrt{X}}.\end{aligned}$$

Au moyen de ces équations et de l'équation (2) on ramène l'étude des intégrales

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{X}},\ \int \frac{dx}{(x-\beta)\sqrt{X}},\ \ldots,\ \int \frac{dx}{(x-\lambda)\sqrt{X}}$$

à celle des intégrales

$$\int \frac{dx}{\sqrt{X}}, \int \frac{xdx}{\sqrt{X}}, \ldots, \int \frac{x^{n-2}\,dx}{\sqrt{X}},$$

puisque le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \alpha & \beta & \ldots & \lambda \\ \alpha^2 & \beta^2 & \ldots & \lambda^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha^{n-1} & \beta^{n-1} & \ldots & \lambda^{n-1} \end{vmatrix}$$

est différent de zéro.

La formule (3) permettra aussi d'exprimer l'intégrale

$$\int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{X}}$$

quand $m > n-2$, au moyen des intégrales

$$\int \frac{dx}{\sqrt{X}}, \int \frac{xdx}{\sqrt{X}}, \ldots, \int \frac{x^{n-2}\,dx}{\sqrt{X}}.$$

Donc, en dernière analyse, les intégrales considérées

$$\int \frac{dx}{(x-a)^m\sqrt{X}}, \int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{X}}$$

peuvent être exprimées au moyen des intégrales

$$\int \frac{dx}{\sqrt{X}}, \int \frac{xdx}{\sqrt{X}}, \ldots, \int \frac{x^{n-2}\,dx}{\sqrt{X}}$$

et de l'intégrale

$$\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{X}}.$$

XI

SUR L'INTERPOLATION AU MOYEN DES FONCTIONS CIRCULAIRES

(Nouvelles Annales de Matématiques, 3.^{e} série, t. IV. Paris, 1885)

I

Le problème de la détermination d'une fonction de x qui reçoive les valeurs $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$, quand on donne à la variable x les valeurs $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, est indéterminé. On y peut satisfaire au moyen d'une fonction entière homogène de $\sin x$ et $\cos x$, et nous avons alors la formule (Hermite, *Cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique de Paris,* p. 331)

$$\begin{aligned} f(\sin x, \cos x) = & \frac{\sin(x-a_2)\sin(x-a_3)\ldots\sin(x-a_n)}{\sin(a_1-a_2)\sin(a_1-a_3)\ldots\sin(a_1-a_n)} y_1 \\ & + \frac{\sin(x-a_1)\sin(x-a_3)\ldots\sin(x-a_n)}{\sin(a_2-a_1)\sin(a_2-a_3)\ldots\sin(a_2-a_n)} y_2 \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \frac{\sin(x-a_1)\sin(x-a_2)\ldots\sin(x-a_{n-1})}{\sin(a_n-a_1)\sin(a_n-a_2)\ldots\sin(a_n-a_{n-1})} y_n. \end{aligned}$$

Inversement, $f(\sin x, \cos x)$ étant une fonction entière, homogène, du degré $n-1$, nous avons une formule de décomposition d'une fraction en des fractions simples, à savoir:

$$\begin{aligned} \frac{f(\sin x, \cos x)}{\sin(x-a_1)\sin(x-a_2)\ldots\sin(x-a_n)} = & \frac{f(\sin a_1, \cos a_1)}{\sin(a_1-a_2)\sin(a_1-a_3)\ldots\sin(a_1-a_n)} \quad \frac{1}{\sin(x-a_1)} \\ & + \frac{f(\sin a_2, \cos a_2)}{\sin(a_2-a_1)\sin(a_2-a_3)\ldots\sin(a_2-a_n)} \quad \frac{1}{\sin(x-a_2)} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \frac{f(\sin a_n, \cos a_n)}{\sin(a_n-a_1)\sin(a_n-a_2)\ldots\sin(a_n-a_{n-1})} \quad \frac{1}{\sin(x-a_n)}. \end{aligned}$$

Nous allons considérer, dans cette Note, le cas où quelques-unes des quantités a_1, a_2, ... sont égales, pour chercher la formule de décomposition et la formule correspondante d'interpolation.

II

En supposant premièrement $a_1 = a_2$, on peut déterminer la somme des deux premiers termes de la formule précédente par le chemin qu'on a l'habitude de suivre dans les questions de cette nature, c'est-à-dire, en posant d'abord $a_2 = a_1 + \omega$, en développant ensuite le résultat suivant les puissances de ω, et en posant enfin $\omega = 0$.

On trouve ainsi d'abord

$$\begin{aligned} f(x) = &-\frac{\sin(x-a_1-\omega)\sin(x-a_3)\ldots\sin(x-a_n)}{\sin\omega}\,\mathrm{F}(a_1) \\ &+\frac{\sin(x-a_1)\sin(x-a_3)\ldots\sin(x-a_n)}{\sin\omega}\,[\mathrm{F}(a_1)+\omega\,\mathrm{F}'(a_1)+\ldots] \\ &+\frac{\sin(x-a_1)\sin(x-a_1-\omega)\sin(x-a_4)\ldots\sin(x-a_n)}{\sin(a_3-a_1)\sin(a_3-a_1-\omega)\sin(a_3-a_4)\ldots\sin(a_3-a_n)}\,y_3 \\ &+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+\frac{\sin(x-a_1)\sin(x-a_1-\omega)\sin(x-a_3)\ldots\sin(x-a_{n-1})}{\sin(a_n-a_1)\sin(a_n-a_1-\omega)\sin(a_n-a_3)\ldots\sin(a_n-a_{n-1})}\,y_n, \end{aligned}$$

où

$$\mathrm{F}(a_1) = \frac{f(a_1)}{\sin(a_1-a_3)\sin(a_1-a_4)\ldots},$$

et où l'on représente $f(\sin x, \cos x)$ par $f(x)$; et ensuite, en développant ce résultat suivant les puissances de ω et en posant enfin $\omega = 0$,

$$\begin{aligned} f(x) = &\cos(x-a_1)\sin(x-a_3)\ldots\sin(x-a_n)\,\mathrm{F}(a_1) \\ &+\sin(x-a_1)\sin(x-a_3)\ldots\sin(x-a_n)\,\mathrm{F}'(a_1) \\ &+\frac{\sin^2(x-a_1)\sin(x-a_4)\ldots\sin(x-a_n)}{\sin^2(a_3-a_1)\sin(a_3-a_4)\ldots\sin(a_3-a_n)}\,f(a_3) \\ &+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+\frac{\sin^2(x-a_1)\sin(x-a_3)\ldots\sin(x-a_{n-1})}{\sin^2(a_n-a_1)\sin(a_n-a_3)\ldots\sin(a_n-a_{n-1})}\,f(a_n). \end{aligned}$$

Cette formule détermine la fonction $f(x)$, étant données les quantités $f(a_1)$, $f'(a_1)$, $f(a_2)$, $f(a_3)$, ...

Nous allons maintenant considérer le cas général.

Nous avons

$$f(x) = \sum_{k=1}^{k=i} \left\{ \frac{\sin(x-a_1)\sin(x-a_2)\ldots\sin(x-a_{k-1})\sin(x-a_{k+1})\ldots\sin(x-a_i)}{\sin(a_k-a_1)\sin(a_k-a_2)\ldots\sin(a_k-a_{k-1})\sin(a_k-a_{k+1})\ldots\sin(a_k-a_i)} \right.$$

$$\left. \times \sin(x-a_{i+1})\sin(x-a_{i+2})\ldots\sin(x-a_n)\,\mathrm{F}(a_k) \right\}$$

$$+ \sum_{k=i+1}^{k=n} \left\{ \frac{\sin(x-a_1)\sin(x-a_2)\ldots\sin(x-a_i)}{\sin(a_k-a_1)\sin(a_k-a_2)\ldots\sin(a_k-a_i)} \right.$$

$$\left. \times \sin(x-a_{i+1})\sin(x-a_{i+2})\ldots\sin(x-a_{k-1})\sin(x-a_{k+1})\ldots\sin(x-a_n)\,\mathrm{F}(a_k) \right\},$$

en posant

$$\mathrm{F}(a_k) = \frac{f(a_k)}{\sin(a_k-a_{i+1})\sin(a_k-a_{i+2})\ldots\sin(a_k-a_n)}.$$

Si l'on fait maintenant

$$a_2 = a_1+\omega, \quad a_3 = a_1+2\omega, \quad \ldots, \quad a_k = a_1+(k-1)\omega, \quad \ldots, \quad a_i = a_1+(i-1)\omega,$$

la première partie de $f(x)$, que nous appelerons P, prend la forme

$$\mathrm{P} = \sum_{k=1}^{k=i} (-1)^{i-k} \frac{\sin(x-a_1)\sin(x-a_1-\omega)\ldots\sin(x-a_1-(i-1)\omega)\ldots\sin(x-a_n)}{\sin\omega\sin2\omega\ldots\sin(k-1)\omega\times\sin\omega\sin2\omega\ldots\sin(i-k)\omega}$$

$$\times\,\mathrm{F}(a_1+(k-1)\omega).$$

Donc la limite de P, correspondant à $\omega=0$, que nous appelerons A, sera le coefficient de ω^{i-1} dans le développement de $\mathrm{P}.\omega^{i-1}$ en série, c'est-à-dire:

$$\mathrm{A} = \frac{1}{(i-1)!}\sum_{k=1}^{k=i}(-1)^{i-k}\frac{d^{i-1}}{d\omega^{i-1}}\left[\frac{\omega^{i-1}\sin(x-a_1)\sin(x-a_1-\omega)\ldots\sin(x-a_1-(i-1)\omega)\mathrm{F}(a_1+(k-1)\omega)}{\sin\omega\sin2\omega\ldots\sin(k-1)\omega\times\sin\omega\sin2\omega\ldots\sin(i-k)\omega}\right]_{\omega=0}$$

$$\times\sin(x-a_{i+1})\sin(x-a_{i+2})\ldots\sin(x-a_n).$$

On doit remarquer que, dans cette expression, on ne doit pas écrire $\sin(x-a_1)$, quand $k=1$; on ne doit pas écrire $\sin(x-a_1-\omega)$, quand $k=2$; etc.

Pour obtenir A, nous employons la formule de différentation de Leibnitz, et nous avons

$$\mathrm{A} = \frac{1}{(i-1)!}\sum_{k=1}^{k=i}(-1)^{i-k}\frac{\sin(x-a_1)}{(k-1)!\,(i-k)!}\left\{\sin(x-a_1-\omega)+\sin(x-a_1-2\omega)+\ldots+\sin[x-a_1-(i-1)\omega]\right.$$

$$\left.+\frac{(k-1)\omega}{\sin(k-1)\omega}+\frac{(k-2)\omega}{\sin(k-2)\omega}+\ldots+\frac{\omega}{\sin\omega}+\frac{\omega}{\sin\omega}+\ldots+\frac{(i-k)\omega}{\sin(i-k)\omega}+\mathrm{F}[a_1+(k-1)\omega]\right\}^{(i-1)}$$

$$\times\sin(x-a_{i+1})\ldots\sin(x-a_n)$$

ou

$$A = \sum_{k=1}^{k=i} (-1)^{i-k} \frac{1}{(k-1)!\,(i-k)!} \sin(x-a_1)\sin(x-a_{i+1})\ldots\sin(x-a_n)$$
$$\times \sum \left\{ (-1)^{\alpha+\beta+\ldots+\lambda} \frac{1^\alpha . 2^\beta \ldots (i-1)^\lambda}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!} \sin\left(x-a_1+\alpha\frac{\pi}{2}\right)\ldots\sin\left(x-a_1+\lambda\frac{\pi}{2}\right)\right.$$
$$\left.\times \frac{(k-1)^u F^{(u)}(a_1)}{u!\,p!\,q!\ldots m!} \left[\frac{(k-1)\omega}{\sin(k-1)\omega}\right]_{\omega=0}^{(p)} \ldots \left[\frac{(i-k)\omega}{\sin(i-k)\omega}\right]_{\omega=0}^{(m)} \right\},$$

où $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, u, p, q, \ldots, m$ représentent toutes les solutions entières positives de l'équation

$$\alpha+\beta+\ldots+\lambda+u+p+q+\ldots+m = i-1.$$

D'un autre côté, nous avons

$$\left[\frac{d^p(x\,\text{coséc}\,x)}{dx^p}\right]_{x=0} = 2(2^{p-1}-1)\,B_{p-1},$$

quand p est un nombre pair, et

$$\left[\frac{d^p(x\,\text{coséc}\,x)}{dx^p}\right]_{x=0} = 0,$$

quand p est un nombre impair, en représentant par B_{p-1} les nombres de Bernoulli. Donc

$$A = \sum X \sin(x-a_1)\sin\left(x-a_1+\alpha\frac{\pi}{2}\right)\ldots\sin\left(x-a_1+\lambda\cdot\frac{\pi}{2}\right)\sin(x-a_{i+1})\ldots\sin(x-a_n),$$

où

$$X = (-1)^{\alpha+\beta+\ldots+\lambda+i-k} \times \frac{2^{i-1}(k-1)^u . 1^\alpha . 2^\beta \ldots (i-1)^\lambda B_{p-1} B_{q-1}\ldots B_{m-1}}{(k-1)!\,(i-k)!\,\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!\,u!\,p!\,q!\ldots m!}$$
$$\times (k-1)^p (k-2)^q \ldots 1^r . 1^r \ldots (i-k)^m$$
$$\times (2^{p-1}-1)(2^{q-1}-1)\ldots(2^{m-1}-1)\,F^{(u)}(a_1),$$

en donnant à $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda, u, p, q, \ldots, m, k$ toutes les valeurs entières et positives qui vérifient l'équation

$$\alpha+\beta+\ldots+\lambda+u+p+q+\ldots+m = k-1,$$

où k ne peut pas être supérieure à i, et où $p, q, \ldots, m$ doivent être des nombres pairs.

En appelant B la limite, correspondant à $\omega = 0$, de la deuxième partie de l'expression de $f(x)$, on peut écrire

$$B = \sum_{k=i+1}^{k=n} \frac{\sin^i(x-a_1)\sin(x-a_{i+1})\ldots\sin(x-a_n)}{\sin^i(a_k-a_1)\sin(a_k-a_{i+1})\ldots\sin(a_k-a_n)} f(a_k).$$

En substituant les expressions de A et B que nous venons d'obtenir, dans la formule

$$f(x) = A + B,$$

on trouve la fonction $f(x)$ qui prend les valeurs données

$$f(a_1),\ f'(a_1),\ f''(a_1),\ \ldots,\ f^{(i-1)}(a_1),$$
$$f(a_{i+1}),\ f(a_{i+2}),\ \ldots,\ f(a_n).$$

Avec un simple changement de notation, en supposant que les fonctions données sont

$$f(a),\ f'(a),\ f''(a),\ \ldots,\ f^{(i-1)}(a),$$
$$f(b_1),\ f(b_2),\ f(b_3),\ \ldots,\ f(b_n),$$

on a

$$A = \sum X \sin(x-a)\sin\left(x-a+\alpha\frac{\pi}{2}\right)\ldots\sin\left(x-a+\lambda\frac{\pi}{2}\right)\sin(x-b_1)\ldots\sin(x-b_n),$$

$$B = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\sin^i(x-a)\sin(x-b_1)\ldots\sin(x-b_n)}{\sin^i(b_k-a)\sin(b_k-b_1)\ldots\sin(b_k-b_n)} f(b_k).$$

En posant

$$b_2 = b_1 + \omega,\ b_3 = b_1 + 2\omega,\ \ldots,\ b_j = b_1 + (j-1)\omega$$

dans les formules précédentes, on trouve la formule qui correspond au cas où sont données les valeurs suivantes:

$$f(a),\quad f'(a),\quad f''(a),\quad \ldots,\ f^{(i-1)}(a),$$
$$f(b_1),\quad f'(b_1),\quad f''(b_1),\quad \ldots,\ f^{(j-1)}(b_1),$$
$$f(b_{j+1}),\ f(b_{j+2}),\ f(b_{j+3}),\ \ldots,\ f(b_n).$$

Considérons maintenant le cas général. Si l'on donne les valeurs suivantes:

$$f(a),\ f'(a),\ f''(a),\ \ldots,\ f^{(i-1)}(a),$$
$$f(b),\ f'(b),\ f''(b),\ \ldots,\ f^{(j-1)}(b),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f(e),\ f'(e),\ f''(e),\ \ldots,\ f^{(m-1)}(e),$$

et si l'on cherche la fonction $f(x)$, on peut employer la formule suivante

$$f(x) = \mathrm{A} + \mathrm{B} + \mathrm{C} + \ldots,$$

où

$$\mathrm{A} = \sum \mathrm{X} \sin(x-a) \sin\left(x - a + \alpha\frac{\pi}{2}\right) \sin\left(x - a + \beta\frac{\pi}{2}\right) \ldots \sin\left(x - a + \lambda\frac{\pi}{2}\right)$$
$$\sin^j(x-b)\sin^l(x-c)\ldots\sin^m(x-e),$$

$$\mathrm{B} = \sum \mathrm{X}_1 \sin^i(x-a) \sin(x-b) \sin\left(x - b + \alpha\frac{\pi}{2}\right) \sin\left(x - b + \beta\frac{\pi}{2}\right) \ldots \sin\left(x - b + \lambda\frac{\pi}{2}\right)$$
$$\sin^l(x-c)\ldots\sin^m(x-e),$$

$$\mathrm{C} = \sum \mathrm{X}_2 \sin^i(x-a) \sin^j(x-b) \sin(x-c) \sin\left(x - c + \alpha\frac{\pi}{2}\right) \sin\left(x - c + \beta\frac{\pi}{2}\right) \ldots \sin\left(x - c + \lambda\frac{\pi}{2}\right)$$
$$\sin^h(x-d)\ldots\sin^m(x-e),$$

. . . .

et où les quantités X_1, X_2, ... dérivent de X par le changement de i en j et de $\mathrm{F}(a)$ en $\mathrm{F}_1(b)$ pour X_1, et de i en l et de $\mathrm{F}(a)$ en $\mathrm{F}_2(c)$ pour X_2, etc., étant

$$\mathrm{F}(a) = \frac{f(a)}{\sin^j(a-b)\sin^l(a-c)\ldots\sin^m(a-e)},$$

$$\mathrm{F}_1(b) = \frac{f(b)}{\sin^i(b-a)\sin^l(b-c)\ldots\sin^m(b-e)},$$

. . . .

Les quantités α, β, ..., λ, u, p, ..., m, k représentent les solutions de l'équation

$$\alpha + \beta + \ldots + \lambda + u + p + q + \ldots + m = k - 1,$$

k étant inférieur à $i+1$ en X, à $j+1$ en X_1, à $l+1$ en X_2, etc.

Nous devons remarquer qu'en A on ne doit pas écrire $\sin(x-a)$ dans le terme correspondant à $k=1$, on ne doit pas écrire $\sin\left(x - a + \alpha\frac{\pi}{2}\right)$ dans le terme correspondant à $k=2$, etc. La même chose arrive en B, C, ... relativement à b, c, ...

Nous devons encore remarquer que le nombre des quantités α, β, ..., λ est $i-1$ en A, mais que, quand $k=2$, manque α; quand $k=3$, manque β, etc. On doit faire la même observation à l'égard de B, C, ... Le nombre des quantités p, q, ..., m est $i-1$.

Enfin, quand quelqu'une des quantités α, β, ..., p, q, ..., $k-1$, $i-k$, u est nulle, le facteur correspondaot ne doit pas exister dans la formule.

*

Les formules que nous venons de trouver résolvent la question d'interpolation proposée, c'est-à-dire qu'elles déterminent une fonction circulaire, qui prend, elle et ses dérivées, des valeurs données. Nous allons donc considérer maintenant la décomposition de la fraction correspondante.

III

Soit $f(\sin x, \cos x)$ une fonction entière, homogène, du degré $i+j+l+\ldots+m-1$. Comme les quantités $\sin\left(x-a+\alpha\frac{\pi}{2}\right)$, $\sin\left(x-a+\beta\frac{\pi}{2}\right)$, etc. sont égales à $\pm\sin(x-a)$ ou à $\pm\cos(x-a)$, la formule de décomposition qui résulte de la formule précédente est

$$\begin{aligned}\frac{f(\sin x, \cos x)}{\sin^i(x-a)\sin^j(x-b)\ldots\sin^m(x-e)} &= \frac{A_1}{\sin(x-a)}+\frac{A_2\cot(x-a)}{\sin(x-a)}+\ldots+\frac{A_i\cot^{i-1}(x-a)}{\sin(x-a)}\\ &+\frac{B_1}{\sin(x-b)}+\frac{B_2\cot(x-b)}{\sin(x-b)}+\ldots+\frac{B_j\cot^{j-1}(x-b)}{\sin(x-b)}\\ &+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

et nous connaisons les coefficients $A_1, A_2, A_3, \ldots, B_1, B_2, \ldots$

Nous allons indiquer rapidement deux autres méthodes pour trouver les coefficients précédents, analogues à celles employées dans la décomposition des fractions rationnelles.

En posant

$$\varphi(x)=\sin^j(x-b)\sin^l(x-c)\ldots\sin^m(x-e),$$

nous avons

$$\begin{aligned}\frac{f(\sin x, \cos x)}{\varphi(x)} &= A_1\sin^{i-1}(x-a)+A_2\cos(x-a)\sin^{i-2}(x-a)+\ldots\\ &+A_i\cos^{i-1}(x-a)+K\sin^i(x-a).\end{aligned}$$

Cette formule donne

$$A_i=\frac{f(\sin a, \cos a)}{\varphi(a)}.$$

En la différentiant, on trouve le résultat

$$\begin{aligned}\frac{d\dfrac{f(\sin x, \cos x)}{\varphi(x)}}{dx} &= (i-1)A_1\sin^{i-2}(x-a)\cos(x-a)+\ldots+A_{i-1}\cos^{i-1}(x-a)\\ &+(i-1)A_i\cos^{i-2}(x-a)\sin(x-a)+\ldots,\end{aligned}$$

III

SUR L'INTÉGRATION D'UNE CLASSE D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU DEUXIÈME ORDRE

(Bulletins de l'Académie royale de Belgique, 3.me série, t. III. Bruxelles, 1882)

Je considère, dans ce travail, une transformation des équations aux dérivées partielles linéaires, du deuxième ordre, qui les ramène à autres du premier ordre, lorsque leurs intégrales intermédiaires contiennent seulement x, y et une fonction déterminée

$$f\left(x, y, z, \frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}\right),$$

qui ne varie pas avec la fonction arbitraire.

Quand cette transformation n'a pas lieu, je fais connaître une transformation qui ramène l'équation proposée à une autre du deuxième ordre, laquelle contient, comme cas particulier, la transformation de Laplace.

I

Soit proposée l'équation aux dérivées partielles, du deuxième ordre:

$$(1) \qquad F = Ar + Bs + Ct + D = 0,$$

où l'on suppose

$$p = \frac{dz}{dx}, \quad q = \frac{dz}{dy}, \quad r = \frac{d^2 z}{dx^2}, \quad s = \frac{d^2 z}{dx\, dy}, \quad t = \frac{d^2 z}{dy^2}.$$

Cherchions les conditions pour que l'équation (1) puisse être transformée dans une autre du premier ordre au moyen de la rélation

$$\varphi(x, y) = f(x, y, z, p, q). \tag{2}$$

Cette équation donne:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dx} &= \frac{df}{dx} + \frac{df}{dz}p + \frac{df}{dp}r + \frac{df}{dq}s = \varphi_1(x, y, z, p, q, r, s, t), \\ \frac{d\varphi}{dy} &= \frac{df}{dy} + \frac{df}{dz}q + \frac{df}{dp}s + \frac{df}{dq}t = \varphi_2(x, y, z, p, q, r, s, t). \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Premièrement on voit que, si l'on élimine deux des quantités r, s, t entre les équations (1) et (3), l'autre quantité doit disparaître.

Ensuite, éliminant une des quantités z, p, q entre l'équation résultante et l'équation (2), dont le second membre est supposé connu (nous verrons bientôt que la condition précédente le détermine), les deux autres doivent disparaître.

Quand ces conditions sont satisfaites, on arrive, en effet, à un résultat de la forme:

$$\psi\left(x, y, \varphi, \frac{d\varphi}{dx}, \frac{d\varphi}{dy}\right) = 0. \tag{4}$$

Les conditions nécessaires et suffisantes pour que la transformation précédente soit possible s'obtiennent donc en exprimant que trois des quantités z, p, q, r, s, t disparaissent, quand on élimine les trois autres; autrement dit, par un théorème sur les déterminants fonctionnels, bien connu:

$$\begin{vmatrix} \frac{dF}{dr} & \frac{dF}{ds} & \frac{dF}{dt} & \frac{dF}{dp} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{df}{dp} \\ \frac{df}{dp} & \frac{df}{dq} & 0 & \frac{d\varphi_1}{dp} \\ 0 & \frac{df}{dp} & \frac{df}{dq} & \frac{d\varphi_2}{dp} \end{vmatrix} = 0, \tag{5}$$

$$(6)\qquad \begin{vmatrix} \frac{dF}{dr} & \frac{dF}{ds} & \frac{dF}{dq} & \frac{dF}{dp} \\ 0 & 0 & \frac{df}{dq} & \frac{df}{dp} \\ \frac{df}{dp} & \frac{df}{dq} & \frac{d\varphi_1}{dq} & \frac{d\varphi_1}{dp} \\ 0 & \frac{df}{dp} & \frac{d\varphi_2}{dq} & \frac{d\varphi_2}{dp} \end{vmatrix} = 0,$$

$$(7)\qquad \begin{vmatrix} \frac{dF}{dr} & \frac{dF}{ds} & \frac{dF}{dz} & \frac{dF}{dp} \\ 0 & 0 & \frac{df}{dz} & \frac{df}{dp} \\ \frac{df}{dp} & \frac{df}{dq} & \frac{d\varphi_1}{dz} & \frac{d\varphi_1}{dp} \\ 0 & \frac{df}{dp} & \frac{d\varphi_2}{dz} & \frac{d\varphi_2}{dp} \end{vmatrix} = 0.$$

L'équation de condition (5) donne:

$$\frac{df}{dp} \cdot \begin{vmatrix} A & B & C \\ \frac{df}{dp} & \frac{df}{dq} & 0 \\ 0 & \frac{df}{dp} & \frac{df}{dq} \end{vmatrix} = 0.$$

Si $\frac{df}{dp} = 0$, on doit éliminer q au lieu de p, au moyen de l'équation (2); et l'on arrive à ce même déterminant multiplé par $\frac{df}{dq}$; mais $\frac{df}{dp}$ et $\frac{df}{dq}$ ne peuvent être nulles en même temps; donc ce déterminant est égal à zéro.

Conséquemment,

$$(8)\qquad C\left(\frac{df}{dp}\right)^2 + A\left(\frac{df}{dq}\right)^2 - B\,\frac{df}{dp}\cdot\frac{df}{dq} = 0;$$

ou

$$(9)\qquad \frac{df}{dp} = \Omega\,\frac{df}{dq},\quad \frac{df}{dp} = \Omega'\,\frac{df}{dq},$$

Ω, Ω' étant les racines de l'équation

$$(10) \qquad C\Omega^2 - B\Omega + A = 0.$$

Chacune des équations (9) est aux dérivées partielles linéaires, du premier ordre, avec deux variables indépendantes; par conséquent on peut toujours les intégrer. Nous avons ainsi deux ensembles de valeurs pour le second membre de la formule (2). Substituons, dans les équations de condition (6) et (7), les dérivées de la fonction f, et éliminons ensuite p ou q au moyen de (2). Si l'on obtient ainsi deux identités avec deux des formes de la fonction f, qui satisfassent à l'une ou à l'autre des équations (9), l'équation proposée a deux transformées de la forme considérée; si l'on obtient deux identités avec une seule des formes de f, l'équation proposée en a seulement une. Enfin si l'on n'obtient pas d'identités, l'équation proposée n'a pas de transformée de la forme considérée.

Le nombre de ces transformées ne peut par être supérieur à deux, parce qu'à chaque transformée correspond un intégrale intermédiaire, comme on va voir.

Quand les équations (6) et (7) sont vérifiées, l'élimination de trois des quantités z, p, q, r, s, t, entre les équations (1), (2) et (3), conduit, comme nous l'avons déjà vu, à une équation de la forme (4), qu'on intègre par la théorie des équations aux dérivées partielles, du premier ordre, avec deux variables indépendantes. Cette équation donne la fonction φ, c'est à-dire le premier nombre de (2). Nous avons ainsi une intégrale intermédiaire de l'équation proposée, avec une fonction arbitraire, introduite par (4).

Nous ferons encore les remarques suivantes:

1.° Comme l'équation proposée est du premier degré par rapport à r, s et t, l'équation (4) sera aussi du premier degré par rapport à $\frac{d\varphi}{dx}$ et $\frac{d\varphi}{dy}$, ou équivalente à un ensemble d'équations du premier degré par rapport à ces dérivées, parce que les formulas (3) sont du premier degré par rapport à toutes ces quantités.

2.° Si les équations de condition (6) et (7) sont vérifiées, nous pouvons annuler, dans les formules (1), (2) et (3), deux des quantités z, p, q, r, s et t, qui doivent disparaître quand on fait l'élimination des autres, et effectuer ensuite cette élimination, laquelle est alors simplifiée.

II

Nous avons considéré, jusqu'ici, le cas où les équations de condition (6) et (7) sont vérifiées par une des fonctions qui satisfont à une des équations (9).

Si seulement l'équation (6) est vérifiée, nous allons transformer l'équation proposée dans une autre du deuxième ordre. Nous verrons, par la suite, qu'il y a une classe étendue et importante d'équations à laquelle cette transformation est applicable.

Après avoir trouvé, par l'équation (5), le seconde membre de (2), si l'on trouve que la condition (6) est remplie, mais que l'équation (7) ne soit pas vérifiée, la variable z ne disparaît pas, quand on élimine, de l'équation (1), trois des quantités r, s, t, p et q, au moyen de (2) et (3). Nous aurons donc une équation de la forme:

$$f_1\left(x, y, z, \varphi, \frac{d\varphi}{dx}, \frac{d\varphi}{dy}\right)=0. \tag{11}$$

Elle donne:

$$\frac{df_1}{dx}+\frac{df_1}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}+\frac{df_1}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dx}+\frac{df_1}{d\frac{d\varphi}{dx}}\cdot\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{df_1}{d\frac{d\varphi}{dy}}\cdot\frac{d^2\varphi}{dx\,dy}=0,$$

$$\frac{df_1}{dy}+\frac{df_1}{dz}\cdot\frac{dz}{dy}+\frac{df_1}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dy}+\frac{df_1}{d\frac{d\varphi}{dx}}\cdot\frac{d^2\varphi}{dx\,dy}+\frac{df_1}{d\frac{d\varphi}{dy}}\cdot\frac{d^2\varphi}{dy^2}=0.$$

La substitution, dans l'équation (2), des valeurs de $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$, données par les équations précédentes, conduit à une équation:

$$f_2\left(x, y, z, \varphi, \mathrm{K}\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\mathrm{L}\frac{d^2\varphi}{dx\,dy}+\mathrm{M},\quad \mathrm{K}_1\frac{d^2\varphi}{dy^2}+\mathrm{L}_1\frac{d^2\varphi}{dx\,dy}+\mathrm{M}_1\right)=0, \tag{12}$$

K, L, M, K_1, L_1, M_1 étant des fonctions de x, y, z, φ, $\frac{d\varphi}{dx}$, $\frac{d\varphi}{dy}$.

Éliminant ensuite z, au moyen de l'équation (11), on obtient une équation aux dérivées partielles, du deuxième ordre, avec deux variables indépendantes.

Si l'on sait intégrer cette équation par un moyen quelconque, on obtient la valeur de φ; et cette valeur, substituée dans (11), conduit à l'intégrale de l'équation proposée (1).

Dans le cas contraire, si l'équation (12) est réductible à la forme (1), on lui applique de nouveau la transformation précédente, et l'on continue ainsi jusqu'à ce qu'on arrive à une équation à laquelle ne soit pas applicable la transformation précédente, ou à une équation qu'on sache intégrer.

III

Nous allons maintenant discuter l'équation (10).

1.er cas. Si $\mathrm{A}=0$, on aura:

$$\Omega'=0,\quad \Omega''=\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{C}};$$

*

et, par conséquent:

$$\frac{df}{dp}=0, \quad \frac{df}{dp}=\frac{B}{C}\cdot\frac{df}{dq};$$

donc une des formes de la fonction f ne contiendra pas p.

2.e cas. Si $C=0$, on aura:

$$\Omega'=\infty, \quad \Omega''=\frac{A}{B},$$

et

$$\frac{df}{dq}=0, \quad \frac{df}{dp}=\frac{A}{B}\cdot\frac{df}{dq};$$

par conséquent, une des formes de la fonction f ne contiendra pas q.

3.e cas. Si, en même temps, $A=0$ et $C=0$, on aura:

$$\Omega'=0, \quad \Omega''=\infty,$$

et

$$\frac{df}{dp}=0, \quad \frac{df}{dq}=\infty.$$

Ainsi, une des formes de la fonction f ne contiendra pas p, et l'autre ne contiendra pas q.

4.e cas. Si, en même temps, $A=0$ et $B=0$, on aura:

$$\Omega'=0, \quad \Omega''=0;$$

puis

$$\frac{df}{dp}=0:$$

les deux formes de f ne contiendront pas p.

5.e cas. Si $B=0$ et $C=0$ on aura:

$$\Omega'=\infty, \quad \Omega''=\infty,$$

$$\frac{df}{dq}=0;$$

les deux formes de f ne contiendront pas q.

L'étude de ces cas particuliers est importante, parce que l'on y réduit souvent des cas plus compliqués. Nous allons donc les étudier.

I. Considérons l'équation aux dérivées partielles:

$$F = Ar + Bs + D = 0,$$

où A, B, D sont des fonctions de x, y, z, p, q.

Nous avons déjà vu que, dans ce cas, l'équation (5) donne:

$$\frac{df}{dq} = 0, \quad A\frac{df}{dq} = B\frac{df}{dp}.$$

La deuxième équation ne conduit pas à un résultat remarquable; considérant donc seulement la première, on a

$$u = f(x, y, z, p), \tag{13}$$

en posant $\varphi(x, y) = u$. Par conséquent:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= \frac{df}{dx} + \frac{df}{dz}p + \frac{df}{dp}r = \varphi_1(x, y, z, p, r), \\ \frac{du}{dy} &= \frac{df}{dy} + \frac{df}{dz}q + \frac{df}{dp}s = \varphi_2(x, y, z, p, s). \end{aligned}\right. \tag{14}$$

La deuxième équation de condition (6) donne:

$$\begin{vmatrix} A & B & \frac{dF}{dq} & \frac{dF}{dp} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{df}{dp} \\ \frac{df}{dp} & 0 & 0 & \frac{d\varphi_1}{dp} \\ 0 & \frac{df}{dp} & \frac{df}{dz} & \frac{d\varphi_2}{dp} \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$B\frac{df}{dz} - \frac{dF}{dq} \cdot \frac{df}{dp} = 0. \tag{15}$$

La fonction f doit donc être obtenue au moyen de l'équation précédente; et, comme cette fonction ne doit pas contenir q, l'équation proposée doit être:

$$F = Ar + Bs + Hq + G = 0,$$

A, B, H, G étant des fonctions de x, y, z, p.

L'équation (15) devient:

$$B\frac{df}{dz} - H\frac{df}{dp} = 0;$$

d'où, intégrant,

$$u = f = \int \lambda (B\,dp + H\,dz), \tag{16}$$

λ étant le facteur qui rend intégrable $B\,dp + H\,dz$.

La troisième équation de condition (7) donne

$$B\left[H\frac{d\varphi_2}{dp} - B\frac{d\varphi_2}{dz}\right] + A\left[H\frac{d\varphi_1}{dp} - B\frac{d\varphi_1}{dz}\right] - B\lambda\left[H\frac{dF}{dp} - B\frac{dF}{dz}\right] = 0. \tag{17}$$

Si l'élimination de quatre des quantités r, s, p, q et z, entre cette équation et les équations (14) et (16), conduit à une identité, l'équation proposée aura une intégrale intermédiaire. Nous allons chercher u dans ce cas.

On déduit de l'équation (16):

$$\frac{du}{dy} = \frac{df}{dy} + \lambda [Hq + Bs];$$

puis, en éliminant $Hq + Bs$ et r, on obtient:

$$A\frac{du}{dx} + B\frac{du}{dy} + G\frac{df}{dp} - B\frac{df}{dy} - A\frac{df}{dx} - A\frac{df}{dz}p = 0. \tag{18}$$

Éliminant ensuite une des quantités p ou z, au moyen de l'équation (16), et observant que l'autre doit disparaître, à cause de l'équation (17), on aura une équation de la forme:

$$\psi\left(x, y, u, \frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}\right) = 0.$$

Cette équation est aux dérivées partielles, du premier ordre, avec deux variables indépendantes. Intégrée, elle donne, pour u, une valeur contenant une fonction arbitraire. En substituant ensuite cette valeur de u dans (16), on obtiendra l'intégrale intermédiaire de l'équation proposée.

Supposons maintenant que l'équation de condition (17) ne soit pas vérifiée. Alors nous emploierons la transformation du numéro II.

Éliminant les quantités r et s, au moyen des équations

$$\frac{du}{dx} = \frac{df}{dx} + \lambda(\mathrm{H}p + \mathrm{B}r),$$

$$\frac{du}{dy} = \frac{df}{dy} + \lambda(\mathrm{H}q + \mathrm{B}s),$$

et ensuite p, au moyen de l'équation (16), et observant que q alors doit disparaître, on obtient:

$$\frac{du}{dx} + \mathrm{B}' \frac{du}{dy} + \mathrm{C}' = 0,$$

B' et C' étant des fonctions de x, y, z, u.

Cette équation donne

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \mathrm{B}' \frac{d^2 u}{dx\, dy} + \left(\frac{d\mathrm{B}'}{dx} + \frac{d\mathrm{B}'}{du} \cdot \frac{du}{dx}\right) \frac{du}{dy} + \frac{d\mathrm{C}'}{dx} + \frac{d\mathrm{C}'}{du} \frac{du}{dx} + \left(\frac{d\mathrm{B}'}{dz} \cdot \frac{du}{dy} + \frac{d\mathrm{C}'}{dz}\right) p = 0.$$

Éliminant z et p, au moyen de l'équation (16) et de la précédente, on obtient une équation:

$$\mathrm{L} \frac{d^2 u}{dx^2} + \mathrm{M} \frac{d^2 u}{dx\, dy} + \mathrm{N} = 0.$$

Si l'on peut intégrer cette équation par une méthode quelconque, on obtient une valeur pour u, qui, substituée dans l'équation (16), conduit à l'intégrale demandée. Dans le cas contraire on examine si l'on peut encore lui appliquer la transformation du numéro II.

II. Si $\mathrm{A} = 0$, c'est-à-dire si l'équation proposée est:

$$\mathrm{B}s + \mathrm{C}t + \mathrm{D} = 0,$$

tout ce que nous avons dit, das le cas précédent, a encore lieu, avec le changement de x en y, p en q, C en A, et réciproquement.

III. Si l'on a, en même temps, $\mathrm{A} = 0$ et $\mathrm{C} = 0$, l'équation (5) donne:

$$\frac{df}{dp} = 0, \quad \frac{df}{dq} = 0.$$

On résout donc la question, ou par le cas I en y faisant $A=0$, ou par le cas II en y faisant $C=0$.

IV. Si $B=0$ et $C=0$, l'équation (8) donne:

$$\left(\frac{df}{dq}\right)^2=0;$$

donc

$$u=f(x, y, z, p);$$

et par suite:

$$\frac{du}{dx}=\frac{df}{dx}+\frac{df}{dz}p+\frac{df}{dp}r.$$

Alors l'équation proposée est

$$F=Ar+D=0.$$

Pour que q disparaisse quand on élimine r et p, au moyen des précédentes, on doit avoir:

$$\frac{df}{dp}=0.$$

Donc f ne peut contenir p; et les transformations considérées n'ont pas lieu.

On excepte le cas où l'équation proposée ne contient pas q; alors, l'équation (6) a lieu sans qu'il soit nécessaire que la fonction f ne contienne pas p. Mais, dans ce cas, l'équation proposée peut être intégrée en considérant y comme constant et remplaçant la constante arbitraire par une fonction arbitraire de y.

V. Si $B=0$ et $A=0$, on applique tout ce qu'on a vu dans le cas précédent, en changeant x en y, p en q, r en t, et réciproquement.

η étant un nombre entier donné, et qu'il représente cette somme par la notation

$$\overset{s}{\underset{\eta}{\mathrm{S}}}[f(r)].$$

Cela posé, considérons la série (3):

$$f(z) = f(t) + \sum_{b=1}^{\infty} \frac{1}{b!} \frac{d^{b-1}\{f'(t)[x\varphi_1(t) + x^2\varphi_2(t) + x^3\varphi_3(t) + \ldots]^b\}}{dt^{b-1}}$$

et développons la puissance du degré b du polynôme qui y entre de la manière suivante.

Multiplions l'un par l'autre deux facteurs égaux à

$$\text{(A)} \qquad x\varphi_1(t) + x^2\varphi_2(t) + x^3\varphi_3(t) + \ldots,$$

le résultat par un troisième, etc., sans faire la réduction des termes semblables. On voit ainsi, par induction, que le coefficient de x^n dans le développement de la puissance du degré b de ce polynôme est égal à la somme des produits qui résultent de

$$\varphi_{h_1}(t)\,\varphi_{h_2}(t)\ldots\varphi_{h_b}(t)$$

en y donnant aux quantités $h_1, h_2, \ldots, h_b$ les valeurs entières et positives qui satisfont à l'équation

$$h_1 + h_2 + \ldots + h_b = n.$$

On peut donc écrire

$$[x\varphi_1(t) + x^2\varphi_2(t) + x^3\varphi_3(t) + \ldots]^b = \Sigma\, \overset{b}{\underset{n}{\mathrm{S}}}[\varphi_r(t)]\,x^n.$$

Pour démontrer cette formule, qu'on vient d'obtenir par induction, nous la supposerons vraie pour la valeur b, et nous allons démontrer qu'alors elle subsiste pour la valeur $b+1$.

Multiplions, pour cela, ses deux membres par le facteur (A). On trouve

$$[x\varphi_1(t) + x^2\varphi_2(t) + x^3\varphi_3(t) + \ldots]^b = \Sigma x^n \{\varphi_1(t)\, \overset{b}{\underset{n-1}{\mathrm{S}}}[\varphi_r(t)] + \varphi_2(t)\, \overset{b}{\underset{n-2}{\mathrm{S}}}[\varphi_r(t)] + \ldots\}.$$

Mais de la définition de l'algorithme isobarique il résulte l'identité

$$\varphi_1(t)\, \overset{b}{\underset{n-1}{\mathrm{S}}}[\varphi_r(t)] + \varphi_2(t)\, \overset{b}{\underset{n-2}{\mathrm{S}}}[\varphi_r(t)] + \ldots = \overset{b+1}{\underset{n}{\mathrm{S}}}[\varphi_r(t)].$$

Donc on a

$$[x\varphi_1(t)+x^2\varphi_2(t)+\dots]^{b+1}=\Sigma\overset{b+1}{\underset{n}{\mathrm{S}}}[\varphi_r(t)]\,x^n.$$

Au moyen de l'identité qu'on vient de démontrer, on peut réduire la série considérée à la forme:

$$f(z)=f(t)+\sum_{n=1}^{\infty}x^n\sum_{b=1}^{n}\frac{1}{b\,!}\cdot\frac{d^{b-1}\left\{f'(t)\overset{b}{\underset{n}{\mathrm{S}}}[\varphi_r(t)]\right\}}{dt^{b-1}}.$$

C'est le résultat qu'on voulait obtenir.

IX

SUR LA THÉORIE DES CUBIQUES CIRCULAIRES ET DES QUARTIQUES BICIRCULAIRES

(Annali di Matematica, série 3.ª, tomo XI. Milano, 1904)

INTRODUCTION.

On sait que les *cubiques circulaires* et les *quartiques bicirculaires* sont anallagmatiques, en général, par rapport à quatre centres d'inversion et on sait déterminer ces points en les considérant comme les centres des quatre cercles qui sont coupés orthogonalement par les cercles bitangents dont la cubique ou la quartique considérée est l'enveloppe. Or, dans la première partie de ce travail, nous allons les chercher par une autre méthode, en les déterminant au moyen d'une hyperbole équilatère, dont une asymptote coïncide avec l'asymptote réelle de la courbe, dans le cas des cubiques circulaires, et au moyen de deux hyperboles équilatères, dans le cas des quartiques bicirculaires.

Une autre question, dont nous allons nous occuper, est celle de la construction des quartiques bicirculaires unicursales. Rappelons d'abord que, si par un point O, placé sur le plan de deux courbes données, on mène des droites qui coupent ces courbes, et si sur chaqu'une on prend un segment, égal à la différence des segments de la même droite compris entre le point donné et les deux courbes, le lieu des points qu'on obtient de cette manière est une courbe appelée *cissoïdale* des courbes données par rapport au point O. Or, nous démontrons, dans la deuxième partie de ce travail, que les quartiques bicirculaires unicursales sont les *cissoïdales* de deux circonférences, réelles ou imaginaires, et qu'il existe, en général, quatre systèmes de circonférences qui donnent la même quartique.

I.

Sur la détermination des centres d'inversion des cubiques circulaires.

1. On sait que les cubiques circulaires peuvent être représentées par l'équation suivante, en prenant un point quelconque de l'asymptote réelle pour l'origine des coordonnées et cette droite pour l'axe des ordonnées:

$$(x^2+y^2)x = A_1 x^2 + B_1 xy + D_1 x + E_1 y + F_1.$$

En changeant ensuite l'origine des coordonnées pour le point de cette asymptote dont l'ordonnée, rapportée à l'origine primitive, est égale à $\frac{1}{2} B_1$, on peut encore réduire cette équation à la forme

$$(x^2+y^2)x = A x^2 + D x + E y + F. \tag{1}$$

On sait aussi que la condition nécessaire et suffisante pour que la courbe inverse d'une cubique circulaire soit une autre cubique circulaire est que le centre d'inversion coïncide avec un point de la cubique donnée, qui ne soit pas double.

Cela posé, nous allons chercher les conditions auxquelles doivent satisfaire les coordonnées du centre d'inversion pour que la transformée de la cubique considérée coïncide avec la courbe primitive.

Soient (α, β) les cordonnées du centre d'inversion, et supposons que ce point coïncide avec un point de la cubique donnée, et qu'on ait, par conséquent,

$$(\alpha^2+\beta^2)\alpha = A\alpha^2 + D\alpha + E\beta + F. \tag{1'}$$

En changeant l'origine des coordonnées pour ce point, en posant pour cela

$$x = x_1 + \alpha, \quad y = y_1 + \beta,$$

on réduit l'équation de la cubique à la forme

$$(2) \qquad (x_1^2+y_1^2)\,x_1=(A-3\,\alpha)\,x_1^2-\alpha\,y_1^2-2\,\beta\,x_1\,y_1+(2\,A\,\alpha+D-3\,\alpha^2-\beta^2)\,x_1+(E-2\,\alpha\,\beta)\,y_1.$$

En posant maintenant dans cette équation

$$x_1=\frac{k^2\,x_2}{x_2^2+y_2^2}, \quad y_1=\frac{k^2\,y_2}{x_2^2+y_2^2},$$

on obtient celle de la cubique inverse:

$$(3) \qquad (x_2^2+y_2^2)\,(P\,x_2+Q\,y_2)=(3\,\alpha-A)\,k^2\,x_2^2+2\,\beta\,k^2\,x_2\,y_2+\alpha\,k^2\,y_2^2+k^4\,x_2,$$

où

$$P=2\,A\,\alpha+D-3\,\alpha^2-\beta^2, \quad Q=E-2\,\alpha\,\beta.$$

En divisant cette équation par P et en égalant ensuite les coefficients des diverses puissances de x_2 et y_2 aux coefficients des mêmes puissances de x_1 et y_1 dans l'équation (2), on trouve les conditions pour que les courbes représentées par les équations (2) et (3) coïncident. On trouve de cette manière sept conditions, mais en sont seulement distinctes les suivantes:

$$P=-k^2, \quad Q=E-2\,\alpha\,\beta=0.$$

La deuxième équation et l'équation (1') déterminent les coordonnées (α, β) des points cherchés, et ensuite la première détermine les valeurs correspondantes de k^2.

On conclut donc que *chaque centre d'inversion, par rapport auquel la cubique est anallagmatique, coïncide avec un point d'intersection de cette cubique avec l'hyperbole dont l'équation, rapportée aux mêmes axes que l'équation* (1), *est la suivante:*

$$(4) \qquad 2\,x\,y=E;$$

et que le rayon du cercle d'inversion correspondant est donné par la formule

$$k^2=3\,\alpha^2+\beta^2-2\,A\,\alpha-D.$$

Inversement, la cubique est anallagmatique par rapport à tous les points d'intersection avec l'hyperbole, à l'exception de ceux dont les coordonnées annulent k^2.

On conclut aussi de ce qui précède que les asymptotes de l'hyperbole considérée coïncident avec l'asymptote réelle de la cubique et avec la perpendiculaire à cette droite, menée par l'origine des coordonnées auxquelles l'équation (1) est rapportée.

En posant

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)x - Ax^2 - Dx - Ey - F$$

et en remarquant qu'on a

$$Q = -f'_y(\alpha, \beta) \quad k^2 = -P = f'_x(\alpha, \beta),$$

on voit encore que les tangentes à la même cubique aux centres d'inversion considérés sont parallèles à son asymptote. Cette proposition importante est bien connue (Basset: *An elementary treatrise on cubic and quartic curves.* Cambridge, 1901, p. 157).

On voit, au moyen des mêmes équations, que, si la cubique est *unicursale,* l'hyperbole passe par son point double, mais que ce point ne peut pas être un des centres d'inversion par rapport auquel la courbe soit anallagmatique. Le point double doit, en effet, satisfaire aux équations

$$f'_y(x, y) = 2xy - E = 0, \quad f'_x(x, y) = 0.$$

On voit enfin, au moyen des équations (1) et (4), que les centres d'inversion considérés sont placés sur une *parabole de* Wallis, représentée par l'équation

$$Ey = 2(x^3 - Ax^2 - Dx - F).$$

2. En écrivant l'équation (1) sous la forme

$$y = \frac{E \pm \sqrt{E^2 - 4x(x^3 - Ax^2 - Dx - F)}}{2x},$$

on voit immédiatement que *l'hyperbole précédemment considérée coupe par le milieu toutes les cordes de la cubique, parallèles à son asymptote réelle.*

Il résulte de cette proposition que les tangentes à la cubique aux centres d'inversion, par rapport auxquels elle est anallagmatique, sont parallèles à l'asymptote réelle et que l'hyperbole passe par le point double de la courbe, quand elle est unicursale. Ces deux propriétés de la cubique ont déjà été démontrées précédemment d'une autre manière.

Il résulte encore de la même proposition que, *si la cubique a un point de rebroussement, l'hyperbole considérée lui est tangente en ce point, et que ce cas est le seul dans lequel cette hyperbole est tangente à la cubique* (1), *à distance finie.*

3. L'équation qui détermine les abscisses des centres d'inversion considérés est la suivante:

$$4(x^4 - Ax^3 - Dx^2 - Fx) - E^2 = 0,$$

et il résulte de ce qui précède que ses racines sont toutes *distinctes*, quand la courbe n'est pas unicursale, puisque alors la cubique et l'hyperbole ne peuvent pas être tangentes à distance finie.

Si la cubique a un *noeud*, elle est coupée par l'hyperbole à ce point, en deux points distincts du précédent et à l'infini. Alors deux des racines de l'équation précédente sont égales et correspondent au point double de la courbe, et deux sont distinctes; et la courbe est anallagmatique par rapport à *deux* centres d'inversion.

Si la cubique a un *point de rebroussement*, elle est coupée par l'hyperbole à ce point, à un autre point placé à distance finie, et à l'infini. Alors il n'existe qu'*un* centre d'inversion par rapport auquel la courbe soit anallagmatique.

Les propositions précédentes doivent être modifiées quand $E=0$. Alors l'hyperbole se réduit aux droites $x=0$ et $y=0$, et le nombre des points par rapport auxquels la cubique est anallagmatique est égal à 3, quand la courbe n'est pas unicursale, à 1 quand elle a un *noeud*, à zéro quand elle a un point de rebroussement.

Les coordonnées de ces points sont données par les equations

$$x^3-\mathrm{A}\,x^2-\mathrm{D}\,x-\mathrm{F}=0,\quad y=0.$$

II.

Sur la détermination des centres d'inversion des quartiques bicirculaires.

4. Considérons maintenant les quartiques bicirculaires et supposons qu'on ait réduit d'abord leur équation, par les moyens connus, à la forme suivante:

$$(x^2+y^2)^2 = A\,x^2 + B\,y^2 + D\,x + E\,y + F; \tag{5}$$

et, en représentant par (α, β) les coordonnées d'un point quelconque, cherchions les conditions pour qu'une quelconque de ces courbes soit anallagmatique par rapport à ce point.

En changeant, pour cela, l'origine des coordonnées pour ce point, donnons à l'équation de la courbe la forme

$$\begin{aligned}(x_1^2+y_1^2)^2 + 4(\alpha x_1 + \beta y_1)(x_1^2+y_1^2) = {}&[A - 4\alpha^2 - 2(\alpha^2+\beta^2)]x_1^2 - 8\alpha\beta x_1 y_1 + [B - 4\beta^2 - 2(\alpha^2+\beta^2)]\,y_1^2 \\ &+ [2A\alpha - 4\alpha(\alpha^2+\beta^2) + D]\,x_1 + [2B\beta - 4\beta(\alpha^2+\beta^2) + E]\,y_1 - f(\alpha, \beta),\end{aligned}$$

où

$$f(x, y) = (x^2+y^2)^2 - A\,x^2 - B\,y^2 - D\,x - E\,y - F.$$

Pour obtenir l'équation de la courbe inverse de la précédente, posons maintenant

$$x_1 = \frac{k^2 x_2}{x_2^2+y_2^2}, \quad y_1 = \frac{k^2 y_2}{x_2^2+y_2^2}.$$

On trouve l'équation

$$\begin{aligned}f(\alpha, \beta)(x_2^2+y_2^2)^2 - k^2[(2A\alpha - 4(\alpha^2+\beta^2)\alpha + D)\,x_2 + (2B\beta - 4(\alpha^2+\beta^2)\beta + E)\,y_2]\,(x_2^2+y_2^2) \\ = k^4(A - 6\alpha^2 - 2\beta^2)\,x_2^2 + k^4(B - 6\beta^2 - 2\alpha^2)\,y_2^2 - 8k^4\alpha\beta\,x_2 y_2 - 4k^6\alpha x_2 - 5k^6\beta y_2 - k^8.\end{aligned}$$

qu'on obtient comme au cas précédent. Si la droite coupe la demi-circonférence plus prochaine de l'axe des ordonnées, la courbe a quatre points où les tangentes sont parallèles à l'axe des abscisses, qui correspondent aux points des circonférences où les tangentes sont parallèles à cet axe. Mais, si la droite coupe l'autre demi-circonférence, ces points devienent imaginaires.

3.° Si le tore est ouvert et une des circonférences est comprise entre l'axe des ordonnées et la droite $x = c$, la courbe est imaginaire.

4.° Si les circonférences coupent l'axe des ordonnées *(tore fermé)*, la spirique est formée par deux ovales, quand les droites $x = c$ et $x = -c$ coupent l'une des circonférences considérées, par un seul ovale, quand une seul de ces droites coupe cette circonférence, et elle est imaginaire quand ni l'une ni l'autre la coupent. On détermine les sommets de ces ovales et les points où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses comme dans les cas précédents.

7. On peut tracer d'une manière très facile les normales à la spirique au moyen des normales aux circonférences considérées. En effet, on a

$$x \frac{dx}{dy} = x_1 \frac{dx_1}{dy},$$

et, par conséquent, les sous-normales de la spirique et de la circonférence, par rapport à l'axe des ordonnées, sont égales. Les normales à ces deux courbes aux points correspondants coupent donc l'axe des ordonnées dans le même point.

8. Les circonférences qui entrent dans les constructions précédentes ne dépendent pas de c, et sont égales à la circonférence méridienne du tore considéré. De là et de ce qu'on vient de dire au n.° 7 il résulte que les normales aux diverses spiriques qui correspondent aux valeurs données à c, menées par les points où elles coupent une droite parallèle à l'axe des abscisses, coupent l'axe des ordonnées en deux points, l'un qui correspond aux points des spiriques où la convexité est tournée vers le côte des abscisses positives et l'autre qui correspond aux points de ces courbes qui ne satisfont pas à cette condition.

Il résulte de ce qui précède que, si un plan se déplace parallèlement à un plan fixe qui passe par l'axe du tore, les normales aux spiriques qui en résultent, aux points du même parallèle de la surface, se coupent sur deux droites qui passent par l'axe du tore et sont perpendiculaires à cette axe. Les lieux géométriques de ces normales sont donc des *conoïdes*.

On trouve facilement l'équation de ces conoïdes.

En effet, l'équation des normales aux spiriques qui correspondent au même point (α, β) de la circonférence considérée ci-dessus est la suivante:

$$x\mathrm{Y}(l^2 - \beta^2 - \alpha^2 + \mathrm{R}^2) + \beta\mathrm{X}(\alpha^2 + \beta^2 + l^2 - \mathrm{R}^2) = 2l^2 x\beta,$$

où $x = \sqrt{\alpha^2 - c^2}$.

Si l'on représente donc par x', y', z' les coordonnées d'un point quelconque de la surface dont on veut chercher l'équation, on a

$$xy'(l^2-\beta^2-\alpha^2+R^2)+\beta x'(\alpha^2+\beta^2+l^2-R^2)=2l^2x\beta.$$

Mais, comme le point (x, β, z') doit être placé sur le tore, on a

$$(x^2+\beta^2+l^2+z'^2-R^2)^2=4l^2(x^2+z'^2).$$

En éliminant maintenant x entre cette équation et la précédente, on obtient l'équation demandée.

On peut donner à cette équation sa forme plus simple en transportant l'origine des coordonnées au point dont les coordonnées, rapportées aux axes primitifs, sont $(0, \omega, 0)$, en supposant

$$\omega=\frac{2l^2\beta}{l^2-\beta^2-\alpha^2+R^2}.$$

On trouve alors

$$\left[K^2\left(\frac{x'}{y'}\right)^2+\beta^2+l^2+z'^2-R^2\right]^2=4l^2\left[K^2\frac{x'^2}{y'^2}+z'^2\right],$$

où

$$K=\frac{\beta(\alpha^2+\beta^2+l^2-R^2)}{l^2-\beta^2-\alpha^2+R^2}.$$

A ce qui précède nous ajouterons encore que les tangentes aux spiriques placées sur les plans parallèles au plan fixe mentionné ci-dessus, aux points du même parallèle du tore, forment des cylindres tangentes à cette surface en tous les points de ce parallèle.

Sur l'extension des méthodes précédentes à quelques autres courbes.

9. Tout ce qu'on vient de dire dans les n.os précédents est applicable à la courbe définie par l'équation

$$(x^2+y^2+l^2-c^2-R^2)^2=4l^2(x^2-c^2), \tag{7}$$

qui ne diffère de (1) que par le signe de c^2. Ainsi on peut construire cette courbe au moyen de l'hyperbole

$$x^2-y_2^2=c^2,$$

conjuguée de celle qui a été considérée précédemment, et au moyen de la relation

$$y^2 = (2R - y_1)\, y_1\,;$$

et on peut la construire aussi au moyen de la circonférence

$$(x_1 + l)^2 + y^2 = R^2$$

et de la relation

$$x^2 = x_1^2 + c^2.$$

La courbe représentée par l'équation (7) peut être considérée comme la section du tore par le plan imaginaire $y = c\sqrt{-1}$. Ses points réels correspondent aux points imaginaires du tore. On peut l'appeler *pseudo-spirique.*

10. Tout ce qu'on a dit précédemment à l'égard des sections du tore peut être étendu aux sections de la surface engendrée par une ellipse, quand elle tourne autour d'une droite placée dans son plan et perpendiculaire á l'un de ses axes.

L'équation de ces sections est la suivante:

$$(a^2 y^2 + b^2 x^2 + b^2 c^2 + b^2 l^2 - a^2 b^2)^2 = 4 b^4 l^2 (x^2 + c^2),$$

a et b étant les demi-axes de l'ellipse, l la distance de son centre à l'axe de révolution et c la distance du plan de la section au même axe; et l'on voit, en procédant comme dans le cas des spiriques, que ces courbes peuvent être construites au moyen de l'hyperbole.

$$b^2 x^2 - a^2 y_1^2 + 2\, ab\, (a - l)\, y_1 + b^2 [c^2 - (l - a)^2] = 0$$

et de la relation

$$y^2 = (2b - y_1)\, y_1\,,$$

ou au moyen de l'ellipse

$$a^2 y^2 + b^2 (x_1 - l)^2 = a^2 b^2$$

et de la relation

$$x^2 = x_1^2 - c^2.$$

Les conséquences de ces constructions données précédemment pour le cas des spiriques, peuvent être étendues facilement aux courbes plus générales qu'on vient de définir.

11. En changeant dans ce qui précède b^2 en $-b^2$ on trouve des résultats applicables aux sections de la surface engendrée par le movement d'hyperbole autour d'une droite placée dans son plan et perpendiculaire à l'un de ses axes.

12. Une des constructions qu'on vient de considérer est aussi applicable aux sections de la surface engendrée par la parabole

$$y^2 = 2px + q,$$

quand elle tourne autour de l'axe des ordonnées, par des plans parallèles à l'axe de révolution.

Il est facile de voir que l'équation de ces courbes est la suivante:

$$(y^2 - q)^2 = 4p^2 (x^2 + c^2),$$

et qu'elles peuvent donc être construites au moyen de la parabole

$$y^2 = 2px_1 + q_1$$

qui coïncide avec la parabole donnée, et de la relation

$$x^2 = x_1^2 - c^2.$$

II.

SUR UNE PROPRIÉTÉ DE LA STROPHOÏDE ET SUR LES CUBIQUES QUI COÏNCIDENT AVEC LEURS CISSOÏDALES

(Nouvelles Annales de Mathématiques, 4.e série, t. VI. Paris, 1906).

Nous allons donner, dans la première partie de ce travail, une propriété de la strophoïde qui nous paraît intéressante et qui n'a pas été encore remarquée, croyons-nous. Ensuite, en généralisant le résultat obtenu, nous chercherons les cubiques qui coïncident avec les cissoïdales d'elles-mêmes et d'une droite ou d'une circonférence.

I.

Rappelons d'abord un théorème de M. de Longchamps dont nous ferons usage. Ce théorème a été obtenu par une voie purement géométrique par ce savant géomètre; mais on peut le démontrer aussi clairement par l'analyse, comme on va voir.

Considérons une courbe quelconque C, *une droite* D *et un point* O, *non situé sur cette droite, et menons par* O *une autre droite arbitraire* D_1. *Soient* R *et* S *les points où* D_1 *coupe la courbe et la droite* D, *respectivement;* ρ_1 *et* ρ_2 *les vecteurs de ces points, rapportées à l'origine* O, *et* M *un point de* D_1 *dont le vecteur* ρ *soit égal à la différence* $\rho_2 - \rho_1$. *Le lieu des positions que* M *prend quand* D_1 *varie, en passant toujours par* O, *est une courbe nommée, comme on sait,* cissoïdale *de la courbe* C *et de la droite* D *par rapport au point* O, *que nous nommerons* pôle.

Cela posé, prenons pour origine des coordonnées le point O, et pour axe des abscisses la perpendiculaire à D qui passe par ce point, et représentons par θ l'angle formé par D_1 avec cet axe, par (x, y) les coordonnées de M, par (x_1, y_1) les coordonnées de R et par a la distance de O à la droite D. On a alors

$$x = a - \rho_1 \cos\theta, \quad y = a \operatorname{tang}\theta - \rho_1 \sin\theta,$$
$$x_1 = \rho_1 \cos\theta, \qquad\qquad y_1 = \rho_1 \sin\theta;$$

et par conséquent les équations de la tangente à la cissoïdale au point M et de la tangente à la courbe C au point R sont les suivantes:

$$(\rho_1 \sin\theta - \rho_1' \cos\theta)\, y + \left(\rho_1' \sin\theta + \rho_1 \cos\theta - \frac{a}{\cos^2\theta}\right) x = \frac{2a\rho_1}{\cos\theta} - \rho_1^2 - \frac{a^2}{\cos^2\theta},$$

$$(\rho_1' \cos\theta - \rho_1 \sin\theta)\, y - (\rho_1 \cos\theta + \rho_1' \sin\theta)\, x = -\rho_1^2,$$

où ρ_1' représente la dérivée de ρ_1 par rapport à θ.

On voit, au moyen de ces équations, que les coordonnées y_1 et y_2 des points où ces tangentes coupent la droite D sont déterminées par les équations

$$y_1 = \frac{2a\rho_1 - \rho_1^2 \cos\theta - a\cos\theta\,(\rho_1' \sin\theta + \rho_1 \cos\theta)}{(\rho_1 \sin\theta - \rho_1' \cos\theta)\cos\theta},$$

$$y_2 = \frac{\rho_1^2 - a(\rho_1 \cos\theta + \rho_1' \sin\theta)}{\rho_1 \sin\theta - \rho_1' \cos\theta}.$$

On a aussi, en représentant par y_3 l'ordonnée du point où la droite D_1 coupe D,

$$y_3 = a \operatorname{tang} \theta.$$

Il résulte de ces équations l'identité

$$y_1 - y_2 = 2(y_3 - y_2),$$

au moyen de laquelle on voit que *la droite qui passe par* O *et par le point* (x, y) *de la cissoïdale coupe la droite donnée* D *en un point équidistant de ceux où elle est coupée par la tangente à la cissoïdale au point* (x, y) *et par la tangente à la courbe* C *au point* (x_1, y_1).

Ce théorème est celui que nous nous proposions de démontrer analytiquement. Il a été communiqué en 1885 par M. de Longchamps à l'Association française pour l'avancement des sciences, au Congrès de Grenoble.

II.

Appliquons maintenant ce théorème à la strophoïde.

Considérons une droite L, et deux points A et B, dont le premier soit situé sur cette droite. Si par le point B on mène des droites qui coupent L, et si l'on prend sur chacune, á partir du point K d'intersection, deux segments KM et KM_1 tels qu'on ait

$$KM = KM_1 = KA,$$

le lieu des points M et M_1 qu'on obtient est, comme on sait bien, une strophoïde (1). On sait aussi que la distance du point B à la droite L est égale à la distance de L à l'asymptote réelle, laquelle est parallèle à L. On a donc, en représentant par H le point d'intersection de la droite MM_1 avec cette asymptote,

$$BM + BM_1 = 2BK = BH.$$

On voit au moyen de cette relation qu'une partie de la cubique considérée est la cissoïdale de l'autre partie et de l'asymptote, et que, par conséquent, *les tangentes à la strophoïde aux points* M *et* M_1 *coupent l'asymptote en deux points équidistants de celui où elle est coupée par la droite* BK.

Ce théorème est celui que nous nous proposions d'établir: il en résulte les corollaires suivants:

1° *La tangente à la strophoïde au point* B *passe par le point où cette cubique coupe son asymptote réelle.*

2° *Les deux points de la strophoïde où la tangente est parallèle à l'asymptote réelle sont situés sur une droite qui passe par* B.

III.

La strophoïde n'est pas la seule cubique qui jouisse de la propriété de coïncider avec une cissoïdale d'elle-même et d'une droite par rapport à un point de la cubique. Nous allons chercher les cubiques qui satisfont à cette condition.

Prenons pour origine des coordonnées le pôle de la cissoïdale et pour axe des coordonnées une parallèle à la droite donnée, et considérons l'équation générale des cubiques:

$$Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 + Dy^3 + Ex^2 + Fxy + Gy^2 + Hx + Ky = 0$$

ou, en posant

$$x = \rho \cos\theta, \quad y = \rho \sin\theta,$$

(1) On peut voir la théorie de cette cubique dans notre *Tratado de las curvas especiales notables*, ouvrage couronné et publié par l'Académie des Sciences de Madrid (Madrid, 1906, p. 16).

pour la rapporter aux coordonnées polaires,

$$(\mathrm{A}\cos^3\theta + \mathrm{B}\cos^2\theta\sin\theta + \mathrm{C}\cos\theta\sin^2\theta + \mathrm{D}\sin^3\theta)\,\rho^2$$
$$+ (\mathrm{E}\cos^2\theta + \mathrm{F}\cos\theta\sin\theta + \mathrm{G}\sin^2\theta)\,\rho + \mathrm{H}\cos\theta + \mathrm{K}\sin\theta = 0.$$

En représentant par ρ_1 et ρ_2 les racines de cette équation, on a

$$\rho_1 + \rho_2 = -\frac{\mathrm{E}\cos^2\theta + \mathrm{F}\cos^2\theta\sin\theta + \mathrm{G}\sin^2\theta}{\mathrm{A}\cos^3\theta + \mathrm{B}\cos^2\theta\sin\theta + \mathrm{C}\cos\theta\sin^2\theta + \mathrm{D}\sin^3\theta}.$$

Supposons maintenant que l'équation de la droite donnée soit $x = a$, ou en coordonnées polaires

$$\rho' = \frac{2}{\cos\theta}.$$

La condition pour que la cubique coïncide avec la cissoïdale d'elle-même et de cette droite, c'est qu'on ait identiquement

$$\rho_1 + \rho_2 = \rho',$$

ou, par conséquent,

$$\mathrm{E} + \mathrm{F}\,\mathrm{tang}\,\theta + \mathrm{G}\,\mathrm{tang}^2\theta = -a\,(\mathrm{A} + \mathrm{B}\,\mathrm{tang}\,\theta + \mathrm{C}\,\mathrm{tang}^2\theta + \mathrm{D}\,\mathrm{tang}^3\theta),$$

quelle que soit la valeur de θ. Cette condition est donc exprimée par les équations

$$\mathrm{E} = -a\mathrm{A},\quad \mathrm{F} = -a\mathrm{B},\quad \mathrm{G} = -a\mathrm{C},\quad \mathrm{D} = 0,$$

au moyen desquelles on voit que l'équation de la cubique doit avoir la forme

$$(\mathrm{A}x^2 + \mathrm{B}xy + \mathrm{C}y^2)(x - a) + \mathrm{H}x + \mathrm{K}y = 0.$$

On peut donc énoncer le théorème suivant:

La condition pour qu'une cubique soit la cissoïdale d'elle-même et d'une droite est qu'une de ses asymptotes coïncide avec cette droite et que les deux autres se coupent en un point de la cubique. Ce point est alors le pôle de la cissoïdale.

Il résulte de ce qui précède cet autre théorème, qui contient celui relatif à la strophoïde, précédemment énoncé:

Si deux asymptotes d'une cubique se coupent en un point de cette courbe, et si par ce point on mène une droite quelconque D, *les tangentes à la cubique aux points où elle est coupée par cette droite rencontrent la troisième asymptote en deux points équidistants du point d'intersection de* D *avec cette dernière asymptote.*

*

Une classe très importante de cubiques auxquelles ces théorèmes sont applicables est celle des *cubiques circulaires qui passent par leur foyer singulier*. Cette classe de cubiques comprend, en effet, les cubiques considérées par Van Rees et Chasles dans leurs études sur les focales du cône de base circulaire oblique (*Correspondance mathématique de Quetelet*, t. V e VI).

IV.

Voici encore une autre question analogue à la précédente:

Chercher les cubiques qui sont cissoïdales d'elles-mêmes et d'une circonférence par rapport à un point où la cubique et la circonférence se coupent

En prenant ce point pour origine des coordonnées et la droite qui passe par le centre de la circonférence pour axe des abscisses, l'équation polaire de cette courbe est

$$\rho'' = 2a\cos\theta,$$

et l'identité

$$\rho_1 + \rho_2 = \rho''$$

donne, au moyen d'une analyse semblable à celle qui fut employée précédemment, les conditions

$$E = -2aA, \quad F = -2aB, \quad E = 2aC, \quad F = -2aD, \quad G = 0.$$

L'équation de la cubique doit donc avoir la forme

$$(x^2 + y^2 - 2ax)(Ax + By) + Hx + Ky = 0.$$

Nous avons le théorème suivant:

Les conditions pour qu'une cubique soit cissoïdale d'elle-même et d'une circonférence par rapport au point où ces courbes se coupent sont les suivantes: 1° *que la cubique soit circulaire;* 2° *que le pôle coïncide avec le point où la cubique est coupée par son asymptote réelle;* 3° *que le centre de la circonférence coïncide avec le foyer singulier de la cubique.*

FIM DO VOLUME SEGUNDO

INDICE

I