OBRAS

SOBRE

MATHEMATICA

OBRAS

SOBRE

MATHEMATICA

DO

Dr. F. Gomes Teixeira

DIRECTOR DA ACADEMIA POLYTECHNICA DO PORTO,
ANTIGO PROFESSOR NA UNIVERSIDADE DE COIMBRA, ETC.

PUBLICADAS

POR ORDEM DO GOVERNO PORTUGUÊS

VOLUME PRIMEIRO

COIMBRA
Imprensa da Universidade
1904

PREFACIO

Em 8 de fevereiro de 1902 foi assignada por Sua Ex.ª o Sr. Presidente do Conselho de Ministros e Ministro dos Negocios do Reino, Conselheiro Ernesto Rodolpho Hintze Ribeiro, uma portaria em que se diz o seguinte:

«Sua Majestade El-Rei, a quem foi presente a proposta do Director Geral de Instrucção Publica para serem reunidos em volumes os trabalhos sobre Mathematica do Dr. Francisco Gomes Teixeira, lente cathedratico e director da Academia Polytechnica do Porto, que se acham dispersos em revistas nacionaes e estrangeiras: ha por bem determinar que se proceda a essa publicação.»

Tendo pois de se proceder á publicação dos nossos trabalhos scientificos, por conta do Estado e debaixo da nossa direcção, em conformidade com o que determina esta portaria, julgámos conveniente fazer-lhes uma revisão, para corrigir erros que encontrássemos, esclarecer alguma passagem obscura e annotar outras.

Na disposição dos trabalhos não seguimos nem a ordem por que foram pela primeira vez impressos, nem a ordem logica dos assumptos a que se referem, porque isso demoraria a sua publicação, visto os mais antigos necessitarem de revisão mais cuidadosa.

É-nos extremamente agradavel exprimir neste logar o nosso reconhecimento ao nobre Ministro que assignou a portaria, e ao illustre Director Geral de Instrucção Publica, Sr. Conselheiro Abel de Andrade, que lhe apresentou a respectiva proposta, pela alta honra que nos fizeram.

Porto, dezembro de 1903.

F. Gomes Teixeira.

I

SOBRE O DESENVOLVIMENTO DAS FUNCÇÕES EM SÉRIE

Memoria premiada e publicada pela Real Academia de sciencias exactas, physicas e naturaes de Madrid

(Memorias de la Real Academia de ciencias exactas, fisicas e naturales de Madrid, 1897, tomo XVIII, parte I)

A

INTRODUCÇÃO

Versa esta Memoria sobre o assumpto do thema seguinte, proposto pela Academia Real das Sciencias de Madrid:

«*Exposición razonada y metódica de los desarrollos en serie de las funciones matemáticas. Teoría general de los mismos. Significación de las llamadas series divergentes. Investigación de una serie típica, de la cual, á ser posible, se deriven como casos particulares las series de mayor importancia y uso en análisis, como las de Taylor, Lagrange y cualquiera otra análoga*».

O desenvolvimento das funcções em série tem sido empregado pelos geometras umas vezes com o fim de calcular os valores numericos que tomam estas funcções para valores determinados das variaveis, outras vezes para estudar as propriedades das mesmas funcções. Quer se empreguem para um, quer para outro fim, é conveniente variar quanto possivel a fórma d'estes desenvolvimentos, já para obter séries mais rapidamente convergentes, quando se destinam ao primeiro fim, já porque ha propriedades que se manifestam nos desenvolvimentos de uma fórma e ficam occultas nos desenvolvimentos de outra fórma.

O problema geral do desenvolvimento das funcções em série consiste em procurar, dadas as funcções $f(x)$, $\theta_1(x)$, $\theta_2(x), \dots$, as condições para que seja

$$f(x) = A_1\,\theta_1(x) + A_2\,\theta_2(x) + \dots + A_n\,\theta_n(x) + \dots,$$

A_1, $A_2 \dots$ representando quantidades constantes, e determinar estas constantes. Na impossibilidade de resolver este problema com toda a generalidade, têem os geometras considerado os casos particulares que, ou por sua simplicidade ou por sua importancia nas applicações da Analyse á Geometria, á Mechanica e á Physica, têem merecido preferencia. Assim foi considerado o caso de $\theta_1(x)$, $\theta_2(x) \dots$ representarem potencias inteiras de uma funcção, o caso de estas funcções serem os senos ou os cosenos de multiplos successivos do arco x, o caso de estas funcções representarem potencias inteiras, positivas ou negativas, de muitos binomios da fórma $x-a$, $x-b \dots$, etc. Cada uma d'estas questões exige bastante espaço para ser tratada de uma maneira completa; porisso aqui limitar-nos-hemos a tratar da primeira, isto é, do desenvolvimento das funcções em série ordenada segundo as potencias inteiras de uma funcção dada.

Principiando pelo caso mais simples, consideraremos primeiramente os desenvolvimentos ordenados segundo as potencias inteiras e positivas de uma variavel independente, tanto no

*

caso d'esta variavel ser real como no caso de ser imaginaria, expondo os differentes methodos empregados pelos geometras para resolver esta questão. Assim estudaremos primeiramente o methodo, apresentado por J. Bernoulli e Taylor e completado por Lagrange e Cauchy, para o desenvolvimento das funcções de variaveis reaes; depois a extensão d'este methodo, esboçada por Cauchy e completada por Darboux, ao caso das funcções de variaveis imaginarias. Em seguida, continuando o estudo do desenvolvimento das funcções de variaveis imaginarias e considerando a questão n'um ponto de vista menos elementar, exporemos o methodo de Cauchy, fundado na theoria dos integraes curvilineos, o methodo de Riemann, fundado na theoria das funcções harmonicas, e finalmente o methodo de Weierstrass, fundado na theoria das séries inteiras. Cada um d'estes methodos é o objecto principal de um dos primeiros cinco capitulos.

O desenvolvimento das funcções em série ordenada segundo as potencias inteiras, positivas e negativas, é tambem considerado. A formula dada, para achar estes desenvolvimentos, por Laurent é demonstrada no capitulo terceiro pelo methodo de Cauchy e no capitulo quinto pelo methodo de Weierstrass e Mittag-Leffler. A bella demonstração que Mittag-Leffler deu d'esta formula nas *Acta Mathematica,* foi apresentada pelo eminente geometra de uma maneira bastante resumida; aqui apresentamo-la com todos os desenvolvimentos necessarios para ser facilmente comprehendida, modificando mesmo algumas passagens com o fim de a tornar mais elementar.

No capitulo sexto demonstraremos a formula de Bürmann, que dá o desenvolvimento das funcções em série ordenada segundo as potencias inteiras e positivas de uma funcção dada, e d'ella tiraremos a de Lagrange, que só differe d'aquella na notação. Em seguida faremos, nos numeros 61 e 62, uma applicação, que julgamos nova, da mesma formula ao desenvolvimento das funcções em série ordenada segundo as potencias de sen x e á demonstração de duas formulas devidas a Euler. Finalmente, para responder á ultima parte do programma proposto, daremos uma formula, que dá o desenvolvimento das funcções em série ordenada segundo as potencias inteiras, positivas e negativas, de uma funcção dada. Esta formula, que julgamos nova e que estudamos nos numeros 64 e 65, comprehende a de Bürmann, e por tanto a de Taylor e Lagrange, e ainda a de Laurent.

Terminando estas considerações preleminares, devemos dizer que, na exposição dos assumptos, suppomos sómente conhecidas do leitor a theoria algebrica das quantidades complexas, os principios geraes mais elementares da theoria das séries e os primeiros principios do calculo differencial e do calculo integral. Porisso, antes de entrar em cada questão, apresentamos alguns estudos preleminares que certamente serão conhecidos por muitos dos leitores. Devemos ainda dizer que fazemos acompanhar cada assumpto pelas indicações bibliographicas e historicas que nos pareceram convenientes.

CAPITULO I

Estudo da série de Taylor no caso das funcções de variaveis reaes

1. As séries de forma mais simples que se podem empregar, para desenvolver as funcções, são as séries da forma

$$A_0 + A_1 (x - a) + \dots + A_n (x - a)^n + \dots,$$

onde a, A_0, $A_1 \dots$ representam quantidades constantes e x uma quantidade variavel. Consideremos, pois, em primeiro logar estas séries, determinando as condições para que qualquer funcção dada $f(x)$ seja susceptivel de um tal desenvolvimento e procurando os meios para calcular os coefficientes A_0, $A_1 \dots$ Supporemos em primeiro logar que a funcção $f(x)$ é real, assim como as quantidades x e a.

2. Gregory, nas sua *Exercitationes geometricae,* publicadas em 1668, e Mercator, na sua *Logarithmotechnia,* publicada no mesmo anno, apresentaram os primeiros desenvolvimentos de funcções em série ordenada segundo as potencias da variavel, dando o primeiro o desenvolvimento de arctang x, e o segundo o desenvolvimento de log $(1 + x)$. Alguns annos depois Newton apresentou, nas suas cartas a Leibnitz de 13 e 24 de outubro de 1676, os desenvolvimentos em série do binomio, do seno, do coseno e da exponencial.

O primeiro geometra que deu, porém, uma formula assaz geral para o desenvolvimento das funcções em série, foi João Bernoulli, que publicou em 1694, nas *Acta eruditorum,* um artigo em que apresentou a formula seguinte (Veja-se *Opera omnia,* t. I, p. 125):

$$\int F(x)\, dx = x F(x) - \frac{1}{2} x^2 F'(x) + \frac{1}{2 \cdot 3} x^3 F''(x) - \dots,$$

de que fez algumas applicações a funcções particulares, a qual elle tirou da identidade evidente

$$F(x)\,dx = [F(x) + xF'(x)]\,dx - \frac{1}{2}[2xF'(x) + x^2F''(x)]\,dx$$

$$+ \frac{1}{2.3}[3x^2F''(x) + x^3F'''(x)]\,dx - \ldots$$

$$\pm \frac{1}{1.2\ldots(n-1)}[(n-1)x^{n-2}F^{(n-2)}(x) + x^{n-1}F^{(n-1)}(x)]\,dx$$

$$\mp \frac{x^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}F^{(n-1)}(x)\,dx,$$

integrando ambos os membros, pondo $n=\infty$, e determinando a constante arbitraria, introduzida pela integração, pela condição de ser nullo o integral $\int F(x)\,dx$, quando $x=0$.

Analysando esta demonstração, vê-se que a conclusão tirada pelo celebre geometra é demasiadamente lata, e que o que se pode affirmar é que este desenvolvimento tem logar todas as vezes que a quantidade

$$\frac{(-1)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}\int x^{n-1}F^{(n-1)}(x)\,dx$$

tende para zero, quando n tende para o infinito. Assim modificada, é esta demonstração ainda hoje empregada.

3. A série de Bernoulli, que vimos de considerar, não está ordenada segundo as potencias da variavel. O primeiro geometra que apresentou uma formula, que dá immediatamente o desenvolvimento das funcções em série ordenada segundo as potencias da variavel, foi Taylor, que, no seu *Methodus incrementorum*, publicado em 1715, deu para este fim a formula

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \ldots + \frac{h^n}{1.2\ldots n}f^{(n)}(x) + \ldots,$$

sem todavia fazer conhecer as condições para que este desenvolvimento seja convergente.

O methodo empregado por Taylor, para chegar a esta formula, é fundado na theoria das differenças finitas. Esboçado pelo seu auctor na obra citada, foi depois desenvolvidamente exposto por Euler nas suas *Institutiones calculi differentialis*. Eis resumidamente em que consiste.

Sejam Δy, $\Delta^2 y$, $\Delta^3 y\ldots$ as differenças da funcção $y=f(x)$, correspondentes á differença constante Δx da variavel independente x. Teremos, como se vê por inducção facil de completar,

$$f(x+\Delta x)=f(x)+\Delta f(x)=y+\Delta y,$$
$$f(x+2\Delta x)=f(x+\Delta x)+\Delta f(x+\Delta x)=y+2\Delta y+\Delta^2 y,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f(x+k\Delta x)=y+k\Delta y+\frac{k(k-1)}{1\,.\,2}\Delta^2 y+\frac{k(k-1)(k-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\Delta^3 y+\ldots,$$

onde k representa um numero inteiro positivo, e onde o numero de termos que entram no segundo membro é igual a $k+1$; e, pondo $k\Delta x=h$,

$$\text{(A)}\qquad f(x+h)=y+h\frac{\Delta y}{\Delta x}+\frac{h(h-\Delta x)}{1\,.\,2}\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}+\ldots$$

Fazendo tender Δx para zero, ou k para o infinito, e attendendo ás egualdades

$$\lim\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{dy}{dx},$$
$$\lim\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}=\lim\frac{\Delta[f(x+\Delta x)-f(x)]}{\Delta x^2}=\lim\frac{\Delta f'(x)}{\Delta x}=\frac{d^2 y}{dx^2},$$
$$\lim\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3}=\lim\frac{\Delta^2[f(x+\Delta x)-f(x)]}{\Delta x^3}=\lim\frac{\Delta^2 f'(x)}{\Delta x^2}=\frac{d^3 y}{dx^3},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

vem a formula pedida

$$f(x+h)=f(x)+h\frac{dy}{dx}+\frac{1}{2}h^2\frac{d^2 y}{dx^2}+\ldots$$

Esta demonstração é evidentemente viciosa. Tem, entre outros inconvenientes, o de se fundar em que o limite para que tende uma somma de parcellas é igual á somma dos limites para que tendem as parcellas, theorema que é verdadeiro quando as parcellas são em numero finito, mas que nem sempre tem logar quando, como no caso actual, o numero $k+1$ das parcellas tende para o infinito.

A formula de Taylor não differe essencialmente da formula de Bernoulli, da qual resulta por uma mudança de notação. Mudando, com effeito, na formula de Bernoulli primeiramente $F(x)$ em $f'(h-x)$, e depois x em h e h em $x+h$, vem a formula de Taylor. Porisso Bernoulli, depois da publicação da obra de Taylor, reclamou para si a prioridade da descoberta da formula precedente. (*Opera omnia,* t. II, p. 584).

entre as circumferencias de raio $R(1+\rho)$ e $\frac{R}{1+\rho}$, com os centros na origem das coordenadas. Como porém o primeiro membro da ultima desigualdade representa o minimo valor da distancia dos pontos da curva, que limita B, á origem das coordenadas, vê-se que esta área contém no interior o circulo de raio $1+h$. Logo temos, para os valores de y representados pelos pontos d'este circulo (numero 52),

$$F_v(y) = A_0^{(v)} + A_1^{(v)} y + A_2^{(v)} y^2 + \ldots$$

Por outra parte, dando a ε um valor positivo sufficientemente pequeno para que seja

$$\frac{1}{2}\left[(1+\varepsilon)^n + \frac{1}{(1+\varepsilon)^n}\right] < 1 + h,$$

e notando que o primeiro membro d'esta desigualdade representa o maximo valor da distancia da origem das coordenadas aos pontos da curva que limita a área B_1, correspondente ao annel A_1, limitado pelas circumferencias de raio $R(1+\varepsilon)$ e $\frac{R}{1+\varepsilon}$, com o centro na origem das coordenadas, vê-se que os modulos das quantidades representadas pelos pontos da área B_1 são menores do que $1+h$.

A série

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} A_\mu^{(v)} y^\mu = \frac{1}{2} \sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} A_\mu^{(v)} \left[\left(\frac{x}{R}\right)^n + \left(\frac{R}{x}\right)^n\right]^\mu$$

é portanto (numero 47) uniformemente convergente na área A_1, e temos, para os valores de x representados pelos pontos d'esta área (numero 49),

$$F_v(y) = \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} a_m x^m.$$

Sommando agora todos os desenvolvimentos d'esta forma, que correspondem aos diversos termos da somma

$$f(x) = \sum_{v=0}^{v=2n-1} F_v(y) x^v,$$

obtem-se um resultado da forma

$$(6) \qquad f(x) = \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} A_m x^m,$$

que tem logar para todos os valores de x representados pelos pontos da área A_1. Basta agora fazer variar R desde R′ até R″ para concluir que *a formula* (6) *tem logar para todos os valores de x representados pelos pontos da área limitada pelas circumferencias de raio* R′ *e* R″, *com o centro na origem das coordenadas*.

A formula (6) é a *formula de Laurent*, que pretendiamos obter.

Applicando a formula (6) á funcção $f(x+a)$ e mudando no resultado x em $x-a$, obtem-se o desenvolvimento

$$f(x)=\sum_{m=-\infty}^{m=\infty} A_m (x-a)^m,$$

que tem logar para todos os valores de x representados pelos pontos do annel comprehendido entre as circumferencias de raio R′ e R″, com o centro no ponto correspondente a a.

56. O methodo que vimos de dar não é proprio para o calculo dos coefficientes do desenvolvimento. Estabelecida porém a possibilidade do desenvolvimento, é facil obter a expressão dos coefficientes por meio de integraes definidos.

Multiplicando, com effeito, os dois membros da igualdade anterior por $(x-a)^{-n}$, obtem-se um resultado da forma

$$(x-a)^{-n} f(x) = A_n + \Sigma A_m (x-a)^m,$$

onde m é differente de n. Pondo agora $x-a=\mathrm{R}e^{i\theta}$, R representando uma quantidade qualquer comprehendida entre R′ e R″, e integrando os dois membros da igualdade entre os limites 0 e 2π, vem a formula

$$A_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{R}^n}\int_0^{2\pi} f(a+\mathrm{R}e^{i\theta})\, e^{-ni\theta}\, d\theta,$$

já obtida no numero 32.

CAPITULO VI

Série de Bürmann. Série de Lagrange. Generalização da série de Bürmann

57. Passemos agora a tratar do desenvolvimento de $f(x)$ em série ordenada segundo as potencias inteiras e positivas de uma funcção dada $\theta(x)$, isto é, em série da forma

$$A_0 + A_1 \theta(x) + A_2 \theta^2(x) + \ldots + A_n \theta^n(x) + \ldots,$$

procurando as condições para que este desenvolvimento tenha logar e o valor dos coefficientes $A_0, A_1, A_2, \ldots$

Supponhamos que as funcções $f(z)$ e $\theta(z)$ são synecticas na área A limitada por um unico contorno fechado S, que $\theta(z)$ admitte um unico zero no interior d'este contorno e que, designando por x um valor representado por um ponto do interior da área A e por a o valor que torna nulla esta funcção e pondo $\theta(z) = (z-a)\Theta(z)$, a desigualdade

$$|\theta(x)| < |\theta(z)|$$

ou

$$|x-a|\,|\Theta(x)| < |z-a|\,|\Theta(z)|$$

é satisfeita por todos os valores de z que correspondem aos pontos do contorno S.

N'este caso a equação

$$\theta(z) - \theta(x) = 0$$

tem uma unica raiz $z = x$ no interior do contorno S. Com effeito, o numero d'estas raizes é dado pelo integral (numero 31)

$$u=\frac{1}{2i\pi}\int_S \frac{\theta'(z)\,dz}{\theta(z)-\theta(x)},$$

ou, desenvolvendo-o em série,

$$u=\frac{1}{2i\pi}\left[\int_S \frac{\theta'(z)\,dz}{\theta(z)}+\theta(x)\int_S \frac{\theta'(z)\,dz}{\theta^2(z)}+\ldots\right];$$

mas o primeiro termo d'esta série é igual á unidade, visto representar as raizes da equação $\theta(z)=0$ comprehendidas na área A, e os outros são nullos, por ser, pondo $z=\rho e^{i\omega}$,

$$\int_S \frac{\theta'(z)\,dz}{\theta^n(z)}=-\left[\frac{1}{(n-1)\,\theta^{n-1}(z)}\right]_0^{2\pi}=0;$$

logo é $u=1$.

Posto isto, consideremos o integral

$$U=\frac{1}{2i\pi}\int_S \frac{f(z)\,\theta'(z)\,dz}{\theta(z)-\theta(x)}.$$

Como o denominador da funcção integrada é nullo quando $z=x$ e este zero é o unico que este denominador tem na área A, temos (numero 28 — 1.º), representando por C uma circumferencia cujo centro seja o ponto x e cujo raio seja igual ao raio do circulo de convergencia da série

$$\theta(z)-\theta(x)=(z-x)\,\theta'(x)+\frac{1}{2}(z-x)\,\theta''(x)+\ldots,$$

$$U=\frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f(z)\,\theta'(z)\,dz}{(z-x)\left[\theta'(x)+\frac{1}{2}(z-x)\,\theta''(x)+\ldots\right]},$$

mas (numero 28 — 2.º)

$$U=\frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f(z)\,\theta'(z)\,dz}{(z-x)\left[\theta'(x)+\frac{1}{2}(z-x)\,\theta''(x)+\ldots\right]}=f(x);$$

logo

$$f(x)=\frac{1}{2i\pi}\int_S \frac{f(z)\,\theta'(z)\,dz}{\theta(z)-\theta(x)}.$$

Se attendermos agora a que, por ser $|\theta(x)| < |\theta(z)|$, tem logar o desenvolvimento em série

$$\frac{1}{\theta(z)-\theta(x)} = \frac{1}{\theta(z)} + \frac{\theta(x)}{\theta^2(z)} + \ldots + \frac{\theta^n(x)}{\theta^{n+1}(z)} + \ldots,$$

vê-se que é

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi}\left[\int_S \frac{f(z)\,\theta'(z)\,dz}{\theta(z)} + \theta(x)\int_S \frac{f(z)\,\theta'(z)\,dz}{\theta^2(z)} + \ldots + \theta^n(x)\int_S \frac{f(z)\,\theta'(z)\,dz}{\theta^{n+1}(z)} + \ldots\right].$$

Para determinar os integraes que entram n'este desenvolvimento, notemos que a integração por partes dá, quando $n > 0$,

$$\int \frac{f(z)\,\theta'(z)\,dz}{\theta^{n+1}(z)} = -\frac{f(z)}{n\theta^n(z)} + \frac{1}{n}\int \frac{f'(z)\,dz}{\theta^n(z)};$$

e portanto temos (numero 29)

$$\int_S \frac{f(z)\,\theta'(z)\,dz}{\theta^{n+1}(z)} = \frac{1}{n}\int_S \frac{f'(z)\,dz}{\theta^n(z)} = \frac{1}{n}\int_S \frac{f'(z)\,dz}{(z-a)^n\,\Theta^n(z)} = \frac{2i\pi}{1.2\ldots n}\,\frac{d^{n-1}}{da^{n-1}}\left[\frac{f'(a)}{\Theta^n(a)}\right].$$

Logo temos a formula

$$f(x) = f(a) + \theta(x)\frac{f'(a)}{\Theta(a)} + \ldots + \frac{\theta^n(x)}{1.2\ldots n}\,\frac{d^{n-1}}{da^{n-1}}\left[\frac{f'(a)}{\Theta^n(a)}\right] + \ldots,$$

devida a Bürmann, que a apresentou em 1796 á Academia das Sciencias de Paris.

58. Pondo na formula precedente

$$\theta(x) = t,$$

t representando um numero dado tal que seja $|t| < |\theta(z)|$, quando z descreve o contorno S, esta formula dá o desenvolvimento em série, ordenada segundo as potencias de t, da funcção $f(x)$ da unica raiz d'esta equação que, como vimos no principio do numero 57, existe no interior de S.

59. A formula de Bürmann contem como caso particular a formula de Taylor. Pondo, com effeito, n'ella $\theta(z) = z - a$ e tomando para o contorno S da integração uma circumferencia de raio R e centro a, limitando uma área na qual a funcção $f(x)$ seja synectica, temos, para todos os pontos x do interior da área e todos os pontos z da circumferencia que a limita, $|x-a|<|z-a|$; a formula de Bürmann é pois applicavel e dá

$$f(x)=f(a)+(x-a)f'(a)+\frac{1}{2}(x-a)^2 f''(a)+\dots$$

60. Pondo na formula de Bürmann

$$\theta(z)=\frac{z-a}{\varphi(z)},$$

$\varphi(z)$ representando uma funcção synectica na área A e tal que seja, para todos os pontos z do contorno d'esta área,

$$\left|\frac{x-a}{\varphi(x)}\right|<\left|\frac{z-a}{\varphi(z)}\right|,$$

vem *a formula de Lagrange*

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{\varphi(x)}f'(a)\varphi(a)+\frac{1}{2}\frac{(x-a)^2}{\varphi^2(x)}\frac{d[f'(a)\varphi^2(a)]}{da}$$
$$+\dots+\frac{1}{1.2\dots n}\frac{(x-a)^n}{\varphi^n(x)}\frac{d^{n-1}[f'(a)\varphi^n(a)]}{da^{n-1}}+\dots$$

Pondo n'esta formula

$$\frac{x-a}{\varphi(x)}=t,$$

vem a seguinte:

$$f(x)=f(a)+tf'(a)\varphi(a)+\frac{1}{2}t^2\frac{d[f'(a)\varphi^2(a)]}{da}$$
$$+\dots+\frac{1}{1.2\dots n}t^n\frac{d^{n-1}[f'(a)\varphi^n(a)]}{da^{n-1}}+\dots,$$

que determina a funcção $f(x)$ da raiz x da equação

$$x=a+t\varphi(x),$$

que existe no interior do contorno S, quando para todos os pontos z do contorno tem logar a desigualdade

$$|t| < \left|\frac{z-a}{\varphi(z)}\right|.$$

No que precede tirou-se a formula de Lagrange da formula de Bürmann. Esta ultima formula não é todavia mais geral do que a primeira. Pondo, com effeito,

$$\varphi(z) = \frac{z-a}{\theta(z)}$$

na formula de Lagrange vem immediatamente a de Bürmann.

A formula de Lagrange foi pela primeira vez publicada pelo grande geometra n'uma memoria apresentada á Academia das Sciencias de Berlin (*Nouvelle méthode pour résoudre les équations litérales par le moyen des séries*, 1770; *Oeuvres*, t. III) a qual foi pouco tempo depois seguida de outra sobre a applicação d'esta formula á resolução de algumas equações que apparecem em Mechanica celeste. A demonstração de Lagrange é fundada em considerações algebricas e nos desenvolvimentos em série de algumas funcções elementares. Laplace na sua *Mechanica celeste* obteve esta formula de uma maneira mais simples, deduzindo-a directamente da série de Maclaurin. Nenhum d'estes geometras deu todavia as condições para que a série seja applicavel. O primeiro geometra que estudou a questão da convergencia da série de Lagrange foi Cauchy, que applicou a esta série os methodos que tão bom resultado lhe tinham dado quando applicados á série de Taylor. Os resultados a que chegou dão logar a difficuldades; abriram todavia a Rouché o caminho para a resolução definitiva d'esta questão (*Journal de l'École Polytechnique de Paris*, cad. 39), o qual coincide, á parte as notações, com o que foi empregado no numero 57 para deduzir a série de Bürmann.

61. Para terminar o que temos a dizer sobre a formula de Bürmann, vamos fazer applicação d'esta formula ao desenvolvimento das funcções em série ordenada segundo as potencias de $\operatorname{sen} x$.

Temos de pôr n'este caso $\theta(x) = \operatorname{sen} x$ e de procurar um contorno tal que seja, para todos os valores de x representados por pontos do interior d'este contorno,

$$|\operatorname{sen} x| < |\operatorname{sen} z|,$$

z representando um ponto qualquer do contorno.

Para resolver esta questão, vamos estudar as curvas definidas pela equação

$$|\operatorname{sen} z| = c,$$

c representando uma constante, ou, pondo $z = x_1 + iy_1$,

$$+\sqrt{\operatorname{sen}^2 x_1 \cos^2 iy_1 - \cos^2 x_1 \operatorname{sen}^2 iy_1} = c, \tag{1}$$

onde $\operatorname{sen}^2 iy_1$ e $\cos^2 iy_1$ são quantidades reaes dadas pelas formulas

$$\operatorname{sen}^2 iy_1 = -\left(\frac{e^{-y_1} - e^{y_1}}{2}\right)^2, \quad \cos^2 iy_1 = \left(\frac{e^{-y_1} + e^{y_1}}{2}\right)^2.$$

Como o valor do primeiro membro d'esta equação não muda quando se muda x_1 em $x_1 + \pi$, vê-se que y_1 é uma funcção periodica de x_1, cujo periodo é igual a π; basta portanto considerar o ramo da curva que corresponde aos valores de x_1 comprehendidos entre $-\frac{\pi}{2}$ e $+\frac{\pi}{2}$.

Vê-se tambem que a curva é symetrica relativamente aos eixos das coordenadadas; podemos portanto considerar sómente, para a discussão da curva, os valores de x_1 e y_1 que são positivos.

Posto isto, supponhamos primeiramente $c \overline{\overline{<}} 1$.

Vê-se immediatamente, pondo na equação $x_1 = 0$, que o ramo considerado da curva corta o eixo das ordenadas no ponto cuja ordenada é igual a $\log(c + \sqrt{c^2 + 1})$. Vê-se tambem, pondo $y_1 = 0$, que a curva corta o eixo das abscissas no ponto cuja abscissa é igual a $\operatorname{arc\,sen} c$.

Resolvendo a equação (1) relativamente a $\cos^2 iy_1$, vem

$$\cos^2 iy_1 = c^2 + \cos^2 x_1,$$

e portanto

$$\frac{e^{-y_1} + e^{y_1}}{2} = \pm \sqrt{c^2 + \cos^2 x_1},$$

ou

$$e^{2y_1} \mp \sqrt{c^2 + \cos^2 x_1}\, e^{y_1} + 1 = 0.$$

Esta equação dá

$$e^{y_1} = \pm \sqrt{c^2 + \cos^2 x_1} \pm \sqrt{c^2 - \operatorname{sen}^2 x_1},$$

e portanto

$$y_1 = \log\left[\pm \sqrt{c^2 + \cos^2 x_1} \pm \sqrt{c^2 - \operatorname{sen}^2 x_1}\right].$$

Esta igualdade faz ver, em primeiro logar, que y_1 é imaginario quando $x_1 > \operatorname{arc\,sen} c$. Para cada valor de x_1, inferior a $\operatorname{arc\,sen} c$, a mesma igualdade dá para y_1 dois valores reaes e dois valores imaginarios. Dos dois valores reaes deve-se aproveitar aquelle que, para $x_1 = 0$, dá

$$y_1 = \log (c + \sqrt{c^2 + 1}),$$

isto é o valor

$$(2) \qquad y_1 = \log [\sqrt{c^2 + \cos^2 x_1} + \sqrt{c^2 - \operatorname{sen}^2 x_1}];$$

o outro corresponde á equação

$$-\sqrt{\operatorname{sen}^2 x_1 \cos^2 iy_1 - \cos^2 x_1 \operatorname{sen}^2 iy_1} = c.$$

Obtêem-se por meio da igualdade (2) todos os pontos da curva comprehendidos entre os pontos cujas abscissas são 0 e $\operatorname{arc\,sen} c$, e vê-se que y_1 cresce desde 0 até $\log (c + \sqrt{c^2 + 1})$ quando x_1 diminue desde $\operatorname{arc\,sen} c$ até 0.

A equação

$$y'_1 = \frac{\operatorname{sen} 2x_1}{i \operatorname{sen} 2iy_1}$$

dá as tangentes á curva e faz ver que as tangentes nas extremidades dos eixos são perpendiculares a estes eixos. Para tirar esta conclusão deve-se observar que a quantidade $i \operatorname{sen} 2iy_1$ é real.

A eliminação de y_1 entre a equação

$$\cos 2iy_1 = 2c^2 + \cos 2x_1,$$

que resulta de (1), e a equação

$$\operatorname{sen}^2 2x_1 \cos 2iy_1 = \cos 2x_1 \operatorname{sen}^2 2iy_1,$$

que resulta de formar y''_1 e pôr depois $y''_1 = 0$, leva á equação

$$\cos 2x_1 = -c^2 \pm \sqrt{c^4 - 1},$$

a qual mostra que não existem pontos de inflexão quando $c \overline{\overline{<}} 1$.

Vê-se pois que cada uma das curvas representadas pela equação $|\operatorname{sen} z| = c$ é composta, quando $c \overline{\overline{<}} 1$, de um numero infinito de ovaes iguaes, cujos centros correspondem ás raizes da equação $\operatorname{sen} x = 0$ e cujos eixos são iguaes a $2 \operatorname{arc} \operatorname{sen} c$ e $2 \log (c + \sqrt{c^2 + 1})$, o primeiro eixo coincidindo com o eixo das abscissas e o segundo sendo parallelo ao eixo das ordenadas.

Vê-se facilmente que, se fôr $c > 1$, as curvas representadas pela equação $|\operatorname{sen} z| = c$ não cortam o eixo das abscissas e não podem porisso dar logar a contornos fechados contendo no interior os pontos que correspondem ás raizes da equação $\operatorname{sen} x = 0$.

Quando c varia desde 1 até 0, as ovaes representadas pela equação $|\operatorname{sen} z| = c$ variam de tal modo que aquella que corresponde a menor valor de c é interior áquella que corresponde a maior valor de c, e diminuem continuamente até se reduzirem a um ponto. Estas curvas resolvem a questão proposta, isto é, cada uma d'ellas limita uma área tal que

$$|\operatorname{sen} x| < |\operatorname{sen} z|,$$

z representando um ponto qualquer do contorno e x um ponto qualquer do interior.

Seja pois $f(z)$ uma funcção synectica na área A, limitada por uma oval cuja equação seja $|\operatorname{sen} z| = c$. A formula de Bürmann é n'este caso applicavel e temos

$$f(x) = f(0) + A_1 \operatorname{sen} x + A_2 \operatorname{sen}^2 x + \ldots,$$

onde $A_1, A_2, \ldots$ são quantidades constantes, que podem ser determinadas por meio dos integraes

$$A_n = \frac{1}{2i\pi} \int_S \frac{f(z) \cos z dz}{\operatorname{sen}^{n+1}} = \frac{1}{2ni\pi} \int_S \frac{f'(z) dz}{\operatorname{sen}^n z},$$

ou por meio da expressão

$$A_n = \frac{1}{1.2\ldots n} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left[\frac{x^n f'(x)}{\operatorname{sen}^n x} \right],$$

onde, depois de effectuadas as derivações indicadas, se deve substituir x por aquella, a, das raizes da equação $\operatorname{sen} x = 0$ que corresponde ao centro da oval considerada.

62. Consideremos, por exemplo, a funcção

$$f(x) = \operatorname{sen} kx,$$

k representando um numero qualquer, real ou imaginario, e ponha-se $a = 0$.

Teremos

$$A_n = \frac{k}{2ni\pi} \int_S \frac{\cos kz dz}{\operatorname{sen}^n z}, \qquad (n > 0).$$

On a donc, le long de DA,

$$\frac{1}{e^{\frac{i\pi z}{\omega}} - e^{\frac{i\pi x}{\omega}}} = \frac{1}{e^{\frac{i\pi z}{\omega}}} + \frac{e^{\frac{i\pi x}{\omega}}}{e^{\frac{2i\pi z}{\omega}}} + \frac{e^{\frac{2i\pi x}{\omega}}}{e^{\frac{3i\pi z}{\omega}}} + \cdots$$

et, le long de CB,

$$\frac{1}{e^{\frac{i\pi z}{\omega}} - e^{\frac{i\pi x}{\omega}}} = -\left[\frac{1}{e^{\frac{i\pi x}{\omega}}} + \frac{e^{\frac{i\pi z}{\omega}}}{e^{\frac{2i\pi x}{\omega}}} + \frac{e^{\frac{2i\pi z}{\omega}}}{e^{\frac{3i\pi x}{\omega}}} + \cdots\right];$$

et par conséquent

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{\frac{ni\pi r}{\omega}},$$

où

$$A_n = -\frac{1}{2\omega}\int_{DA} e^{-\frac{ni\pi z}{\omega}} f(z)\,dz,$$

$$A_{-n} = \frac{1}{2\omega}\int_{BC} e^{\frac{ni\pi z}{\omega}} f(z)\,dz = \frac{1}{2\omega}\int_{DA} e^{\frac{ni\pi z}{\omega}} f(z)\,dz.$$

On a donc, en représentant par l le segment DA (ou un segment égal pris sur une droite parallèle à DA comprise entre DA et BC) la formule de *Fourier:*

$$f(x) = \frac{1}{2\omega}\left[\int_l f(z)\,dz + 2\sum_{n=1}^{\infty}\int_l f(z)\cos\frac{n(x-z)\pi}{\omega}\,dz\right].$$

19. La formule de *Fourier* est encore susceptible, dans le cas des variables complexes, d'une extension que nous allons indiquer. Supposons, en effet, maintenant: 1°. que la fonction $f(z)$ ne soit pas périodique, mais qu'elle soit holomorphe dans le voisinage du segment de droit AB, c'est-à-dire dans l'aire limitée par un parallélogramme PP_1Q_1Q dont deux côtes PP_1 et QQ_1 sont parallèles et égaux à AB; 2°. que ce segment soit représenté par le nombre complexe 2ω et que a soit l'affixe du point A. On a, comme antérieurement, en représentant par S le contour du parallélogramme,

$$f(x)=\frac{1}{2\omega}\int_S \frac{f(z)\,e^{\frac{i\pi z}{\omega}}\,dz}{e^{\frac{i\pi z}{\omega}}-e^{\frac{i\pi x}{\omega}}}.$$

Soient maintenant u l'affixe d'un point de AP, v l'affixe d'un point de AQ et x l'affixe d'un point de AB. On peut écrire

$$f(x)=\frac{1}{2\omega}\left[\int_a^u \frac{f(z)\,e^{\frac{i\pi z}{\omega}}\,dz}{e^{\frac{i\pi z}{\omega}}-e^{\frac{i\pi x}{\omega}}}+\int_u^{u+2\omega} \frac{f(z)\,e^{\frac{i\pi z}{\omega}}\,dz}{e^{\frac{i\pi z}{\omega}}-e^{\frac{i\pi x}{\omega}}}+\int_{u+2\omega}^{a+2\omega} \frac{f(z)\,e^{\frac{i\pi z}{\omega}}\,dz}{e^{\frac{i\pi z}{\omega}}-e^{\frac{i\pi x}{\omega}}}\right.$$
$$\left.-\int_a^v \frac{f(z)\,e^{\frac{i\pi z}{\omega}}\,dz}{e^{\frac{i\pi z}{\omega}}-e^{\frac{i\pi x}{\omega}}}-\int_v^{v+2\omega} \frac{f(z)\,e^{\frac{i\pi z}{\omega}}\,dz}{e^{\frac{i\pi z}{\omega}}-e^{\frac{i\pi x}{\omega}}}-\int_{v+2\omega}^{a+2\omega} \frac{f(z)\,e^{\frac{i\pi z}{\omega}}\,dz}{e^{\frac{i\pi z}{\omega}}-e^{\frac{i\pi x}{\omega}}}\right],$$

et par conséquent

$$f(x)=\frac{1}{2\omega}\left[\lim_{u=a}\int_u^{u+2\omega} \frac{f(z)\,e^{\frac{i\pi z}{\omega}}\,dz}{e^{\frac{i\pi z}{\omega}}-e^{\frac{i\pi x}{\omega}}}-\lim_{v=a}\int_v^{v+2\omega} \frac{f(z)\,e^{\frac{i\pi z}{\omega}}\,dz}{e^{\frac{i\pi z}{\omega}}-e^{\frac{i\pi x}{\omega}}}\right],$$

ou, en supposant, comme antérieurement, que l'argument de 2ω est compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ et en ayant égard à l'inégalité

$$\left|e^{\frac{i\pi z}{\omega}}\right|>\left|e^{\frac{i\pi x}{\omega}}\right|,$$

qui a lieu le long de la droite qui passe par les points d'affixes u et $u+2\omega$, et à l'inégalité

$$\left|e^{\frac{i\pi z}{\omega}}\right|<\left|e^{\frac{i\pi x}{\omega}}\right|,$$

qui a lieu le long de la droite qui passe par les points d'affixes v et $v+2\omega$,

$$f(x)=\frac{1}{2\omega}\left[\lim_{u=a}\sum_{n=0}^{\infty} e^{\frac{ni\pi x}{\omega}}\int_{u}^{u+2\omega} f(z)\, e^{-\frac{ni\pi z}{\omega}}\, dz+\lim_{v=a}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{ni\pi x}{\omega}}\int_{v}^{v+2\omega} f(z)\, e^{\frac{ni\pi z}{\omega}}\, dz\right].$$

Considérons maintenant la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{ni\pi x}{\omega}}\int_{u}^{u+2\omega} f(z)\, e^{-\frac{ni\pi z}{\omega}}\, dz,$$

et remarquons que, comme on a

$$\int f(z)\, e^{-\frac{ni\pi z}{\omega}}\, dz=\frac{\omega i}{n\pi} f(z)\, e^{-\frac{ni\pi z}{\omega}}+\frac{\omega^2}{n^2\pi^2} f'(z)\, e^{-\frac{ni\pi z}{\omega}}-\frac{\omega^2}{n^2\pi^2}\int f''(z)\, e^{-\frac{ni\pi z}{\omega}}\, dz,$$

on peut l'écrire de la manière suivante:

$$\frac{\omega i}{\pi}\left[f(u+2\omega)-f(u)\right]\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} e^{\frac{ni\pi(u-x)}{\omega}}+\frac{\omega^2}{\pi^2}\left[f'(u+2\omega)-f'(u)\right]\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} e^{-\frac{ni\pi(u-x)}{\omega}}$$
$$-\frac{\omega^2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} e^{\frac{ni\pi x}{\omega}}\int_{u}^{u+2\omega} f(z)\, e^{-\frac{ni\pi z}{\omega}}\, dz.$$

Or la série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} e^{-\frac{ni\pi(a-x)}{\omega}},$$

ou, puisque les arguments de $x-a$ et de ω sont égaux,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} e^{\frac{ni\pi|a-x|}{|\omega|}},$$

ou

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left[\cos\frac{n\pi|x-a|}{|\omega|}+i\sin\frac{n\pi|x-a|}{|\omega|}\right]$$

est convergente, suivant un théorème connu (Picard, *Traité d'Analyse,* t. I, p. 231); et on voit par conséquent, au moyen d'un théorème donné par *Abel* pour le cas des séries de termes réels et dont M. *Picard* a fait l'extension au cas des séries de termes complexes (l. c., t. II, p. 73), qu'est

$$\lim_{u=a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{\frac{ni\pi(x-u)}{\omega}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{\frac{ni\pi(x-a)}{\omega}}.$$

On trouve de la même manière

$$\lim_{u=a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{\frac{ni\pi(x-u)}{\omega}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{\frac{ni\pi(x-a)}{\omega}}$$

Comme on a

$$\left| \int_u^{u+2\omega} f''(z) e^{-\frac{ni\pi(z-x)}{\omega}} dz \right| < \mathrm{M} \, |2\omega|,$$

où M représente la plus grande valeur que prend $\left| f''(z) e^{-\frac{ni\pi(z-x)}{\omega}} \right|$ dans le parallélogramme $\mathrm{P P_1 Q_1 Q}$, on voit que les valeurs des termes de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left| \int_u^{u+2\omega} f''(z) e^{-\frac{ni\pi(z-x)}{\omega}} dz \right|$$

sont inférieures aux valeurs des termes correspondants de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{M}\,|2\omega|}{n^2}$, quelle que soit la valeur de u, et par conséquent que la série considérée est uniformement convergente dans le voisinage du point A; nous avons par conséquent

$$\lim_{u=a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \int_u^{u+2\omega} f''(z) e^{-\frac{ni\pi(z-x)}{\omega}} dz = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \int_a^{a+2\omega} f''(z) e^{-\frac{ni\pi(z-x)}{\omega}} dz.$$

De tout ce qui précède on tire l'égalité

$$\lim_{u=a} \sum_{n=0}^{\infty} e^{\frac{ni\pi x}{\omega}} \int_u^{u+2\omega} f(z) e^{-\frac{ni\pi z}{\omega}} dz = \sum_{n=0}^{\infty} e^{\frac{ni\pi x}{\omega}} \int_a^{a+2\omega} f(z) e^{-\frac{ni\pi z}{\omega}} dz;$$

et de la même manière on trouve la suivante:

$$\lim_{v=a} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{ni\pi x}{\omega}} \int_{v}^{v+2\omega} f(z)\, e^{\frac{ni\pi z}{\omega}}\, dz = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{ni\pi x}{\omega}} \int_{a}^{a+2\omega} f(z)\, e^{\frac{ni\pi z}{\omega}}\, dz.$$

Il vient donc la formule

$$f(x) = \frac{1}{2\omega}\left[\sum_{n=0}^{\infty} e^{\frac{ni\pi x}{\omega}} \int_{a}^{a+2\omega} f(z)\, e^{-\frac{ni\pi z}{\omega}}\, dz + \sum_{n=1} e^{-\frac{ni\pi x}{\omega}} \int_{a}^{a+2\omega} f(z)\, e^{\frac{ni\pi z}{\omega}}\, dz\right],$$

ou

$$f(x) = \frac{1}{2\omega}\left[\int_{a}^{a+2\omega} f(z)\, dz + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \int_{a}^{a+2\omega} f(z) \cos \frac{n\pi(x-z)}{\omega}\, dz\right],$$

laquelle a lieu pour toutes les valeurs de x représentées par les points de AB.

U

IV

EXTRAIT D'UNE LETTRE ADRESSÉE A M. HERMITE

(Bulletin des sciences mathématiques — Paris, 1890, 2.e série t. XIV)

EXTRAIT D'UNE LETTRE ADRESSÉE A M. HERMITE

Permettez, Monsieur, que je prenne la liberté de vous présenter quelques conséquences relatives aux développements des fonctions en série ordonnée suivant les puissances de $\sin(x-a)$ et $\cos(x-a)$ que je viens de déduire de la considération de l'intégrale curviligne

$$J=\int_s \frac{f(z)\sin^m(x-a)\,dz}{\sin(z-x)\sin^m(z-a)}.$$

Je prendrai pour contour de l'intégration le rectangle, dont le centre est le point qui a pour affixe a, et dont les côtés sont deux droites parallèles à l'axe des abscisses, égales à $2k$ (où $2k \overline{\overline{<}} \pi$), et deux droites parallèles à l'axe des ordonnées, égales à $2l$; et je supposerai que la fonction $f(z)$ est holomorphe dans l'aire limitée par ce contour, et que x est l'affixe d'un point de l'intérieur de cette aire.

1. Cela posé, j'applique à l'intégrale J le théorème de Cauchy qui donne l'expression de l'intégrale des fonctions uniformes, prise le long d'un contour fermé, et je trouve

$$J=2i\pi(A+B),$$

en représentant par A et B les résidus de la fonction

$$F(z)=\frac{f(z)\sin^m(x-a)}{\sin(z-x)\sin^m(z-a)},$$

par rapport à x et à a, qui sont les racines de $\sin(z-x)=0$ et $\sin(z-a)=0$ qui sont représentées par des points de l'intérieur de l'aire considérée.

Le résidu de $F(z)$, par rapport à x, est le coefficient de $\frac{1}{h}$ dans le développement de

$$F(x+h)=\frac{f(x+h)\sin^m(x-a)}{\sin h\sin^m(x-a+h)},$$

en série ordonnée suivant les puissances de h; et nous avons, par conséquent,

$$A=f(x).$$

Le résidu B de $F(z)$, par rapport à a, est le coefficient de $\frac{1}{h}$ dans le développement de

$$F(a+h)=\frac{f(a+h)\sin^m(x-a)}{\sin(a-x+h)\sin^m h}=\frac{f(a+h)\sin^m(x-a)}{h^m\sin(a-x+h)\dfrac{\sin^m h}{h^m}}$$

en série ordonnée suivant les puissances de h. Mais nous avons, en développant les trois fonctions

$$f(a+h),\quad \sin^{-1}(a-x+h),\quad \frac{h^m}{\sin^m h}$$

en série ordonnée suivant les puissances de h,

$$F(a+h)=\frac{1}{h^m}\Sigma\frac{h^u}{u!}f^u(a)\sin^m(x-a)\times\Sigma\frac{h^v}{v!}\left[\frac{d^v\sin^{-1}(a-x+h)}{dh^v}\right]_0\times\Sigma\frac{h^w}{w!}\left[\frac{d^w(h\operatorname{cos\acute{e}c}h)^m}{dh^w}\right]_0.$$

Donc on a

$$B=\Sigma\frac{\sin^m(x-a)}{u!\,v!\,w!}f^u(a)\left[\frac{d^v\sin^{-1}(a-x+h)}{dh^v}\right]_0\left[\frac{d^w(h\operatorname{cos\acute{e}c}h)^m}{dh^w}\right]_0,$$

où la somme représentée par Σ se rapporte à toutes les solutions entières positives ou nulles de l'équation

$$u+v+w=m-1.$$

En formant maintenant les dérivées successives de $\sin^{-1}(x-a)$, je trouve

$$\left[\frac{d^v\sin^{-1}(a-x+h)}{dh^v}\right]_0=-\frac{d^v\sin^{-1}(x-a)}{dx^v}=\frac{B_0+B_1\sin^2(x-a)+\ldots+B_{\frac{1}{2}v}\sin^v(x-a)}{\sin^{v+1}(x-a)},$$

IX

SUR LE DÉVELOPPEMENT DES FONCTIONS DOUBLEMENT PÉRIODIQUES DE SECONDE ESPÈCE EN SÉRIE TRIGONOMÉTRIQUE

(Journal für die reine und angewandte Mathematik,
gegründet von Crelle-Berlin 1903. Band CXXV)

SUR LE DÉVELOPPEMENT DES FONCTIONS DOUBLEMENT PÉRIODIQUES DE SECONDE ESPÈCE EN SÉRIE TRIGONOMÉTRIQUE

1. On peut faire dépendre l'étude des fonctions doublement périodiques de seconde espèce, dont les multiplicateurs sont c et c', de l'étude d'autres dont l'un des multiplicateurs est égal à l'unité. En considérant donc ce dernier cas, soit $f(x)$ une fonction donnée qui satisfasse aux conditions

$$f(x+2\omega)=f(x), \quad f(x+2\omega')=cf(x).$$

On sait développer cette fonction en série trigonométrique, valable dans tout le plan de représentation de la variable x, et aussi en série valable dans la zone comprise entre deux droites dont l'inclinaison sur l'axe est égale à l'argument de ω. *Briot* et *Bouquet,* dans leur ouvrage sur la *Théorie des fonctions elliptiques,* ont employé, pour obtenir ces développements dans le cas particulier où $c=-1$, la théorie des résidus de *Cauchy*. Nous allons démontrer qu'on peut traiter cette question dans le cas général, où c est un nombre quelconque, au moyen de la même théorie. Nous partirons, dans ce but, de l'intégrale

$$U=\int \frac{f(z)\, e^{\frac{i\pi z}{\omega}}\, dz}{e^{\frac{i\pi z}{\omega}}-e^{\frac{i\pi x}{\omega}}},$$

qui nous a servi déjà pour obtenir la formule de *Fourier,* dans un article publié dans le tome CXII, p. 97, de ce Journal ([1]); et nous obtiendrons de cette manière non seulement les

([1]) Veja-se a pag. 157 do presente volume.

résultats connus, mais encore quelques développements, valables dans un demi-plan, qui, à ce que nous croyons, n'ont pas encore été remarqués. Nous supposerons que la fonction $f(x)$ ait un seul pôle dans chaque parallélogramme des périodes, et que ce pôle soit simple. On pourrait traiter au moyen de la même analyse le cas général où dans chaque parallélogramme il existe un nombre quelconque de pôles, avec un degré quelconque de multiplicité; mais on n'en a pas besoin, parce qu'on peut réduire ce cas à l'antérieur au moyen de la formule de décomposition de *Hermite*.

2. Considérons dans le plan de représentation de x un parallélogramme ABCD dont le côté DA représente géométriquement, en grandeur et en direction, la quantité 2ω, et lont le côté AB représente la quantité $2(\alpha+\beta+1)\omega'$, α et β étant deux nombres entiers positifs quelconques.

Dans ce parallélogramme la fonction $f(x)$ a $\alpha+\beta+1$ pôles, qu'on peut représenter par

$$a-2\alpha\omega',\ a-2(\alpha-1)\omega',\ \ldots,\ a,\ a+2\omega',\ a+4\omega',\ \ldots,\ a+2\beta\omega';$$

et, si l'on représente par k le résidu de la fonction par rapport au pôle a, ces résidus par rapport aux pôles que contient le parallélogramme considéré, sont respectivement

$$c^{-\alpha}k,\ c^{-(\alpha-1)}k,\ \ldots,\ k,\ ck,\ \ldots,\ c^{\beta}k.$$

Cela posé, considérons l'intégrale U prise le long du contour S du parallélogramme ABCD considéré; et soit x l'affixe d'un point de l'intérieur de ce parallélogramme.

On trouve, au moyen du théorème fondamental de la théorie des résidus, en remarquant que les résidus de la fonction

$$\frac{f(z)\,e^{\frac{i\pi z}{\omega}}}{e^{\frac{i\pi z}{\omega}}-e^{\frac{i\pi x}{\omega}}},$$

par rapport à ses pôles x et $a+2m\omega'$, sont

$$\frac{\omega}{i\pi}f(x),\quad kc^m\cdot\frac{e^{\frac{i\pi}{\omega}(a+2m\omega')}}{e^{\frac{i\pi}{\omega}(a+2m\omega')}-e^{\frac{i\pi x}{\omega}}},$$

la formule suivante:

$$f(x)=\frac{1}{2\omega}\int_{S}\frac{f(z)\,e^{\frac{i\pi z}{\omega}}\,dz}{e^{\frac{i\pi z}{\omega}}-e^{\frac{i\pi x}{\omega}}}-\frac{i\pi}{\omega}\sum_{m=-\alpha}^{m=\beta}kc^{m}\cdot\frac{e^{\frac{i\pi}{\omega}(a+2m\omega')}}{e^{\frac{i\pi}{\omega}(a+2m\omega')}-e^{\frac{i\pi x}{\omega}}},$$

qui, à cause de l'égalité

$$\frac{e^{\frac{i\pi}{\omega}(a+2m\omega')}}{e^{\frac{i\pi}{\omega}(a+2m\omega')}-e^{\frac{i\pi x}{\omega}}}=\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\cot\frac{\pi}{2\omega}(x-a-2m\omega'),$$

donne

$$f(x)=\frac{1}{2\omega}\int_{S}\frac{f(z)\,e^{\frac{i\pi z}{\omega}}\,dz}{e^{\frac{i\pi z}{\omega}}-e^{\frac{i\pi x}{\omega}}}-\frac{i\pi k}{2\omega}\sum_{m=-\alpha}^{m=+\beta}c^{m}\left[1+i\cot\frac{\pi}{2\omega}(x-a-2m\omega')\right].$$

Si l'on remarque maintenant que les parties de l'intégrale, qui entre dans cette formule, qui correspondent aux droites AB et DC sont égales, on voit qu'on peut écrire

$$f(x)=\frac{1}{2\omega}\left[\int_{DA}\frac{f(z)\,e^{\frac{i\pi z}{\omega}}\,dz}{e^{\frac{i\pi z}{\omega}}-e^{\frac{i\pi x}{\omega}}}-\int_{CB}\frac{f(z)\,e^{\frac{i\pi z}{\omega}}\,dz}{e^{\frac{i\pi z}{\omega}}-e^{\frac{i\pi x}{\omega}}}\right]-\frac{i\pi k}{2\omega}\sum_{m=-\alpha}^{m=\beta}c^{m}\left[1+i\cot\frac{\pi}{2\omega}(x-a-2m\omega')\right].$$

Supposons maintenant, pour fixer les idées, que l'argument de ω soit compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$. Nous avons déjà démontré dans ce Journal (tome CXII, p. 119) (1) qu'on a alors, pour tous les points z de la droite DA,

$$\frac{1}{e^{\frac{i\pi z}{\omega}}-e^{\frac{i\pi x}{\omega}}}=\frac{1}{e^{\frac{i\pi z}{\omega}}}+\frac{e^{\frac{i\pi x}{\omega}}}{e^{\frac{2i\pi z}{\omega}}}+\frac{e^{\frac{2i\pi x}{\omega}}}{e^{\frac{3i\pi z}{\omega}}}+\dots,$$

(1) Veja-se na pag. 157 do presente volume.

FF

et, pour tous les points z de la droite CB,

$$\frac{1}{e^{\frac{i\pi z}{\omega}}-e^{\frac{i\pi x}{\omega}}}=-\left[\frac{1}{e^{\frac{i\pi x}{\omega}}}+\frac{e^{\frac{i\pi z}{\omega}}}{e^{\frac{2i\pi x}{\omega}}}+\frac{e^{\frac{2i\pi z}{\omega}}}{e^{\frac{3i\pi x}{\omega}}}+\dots\right].$$

Donc nous avons

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{A}_n\,e^{\frac{ni\pi x}{\omega}}-\frac{i\pi k}{2\omega}\sum_{m=-\alpha}^{m=\beta}c^m\left[1+i\cot\frac{\pi}{2\omega}(x-a-2m\omega')\right],$$

où

$$\mathrm{A}_n=\frac{1}{2\omega}\int_{\mathrm{DA}}f(z)\,e^{-\frac{ni\pi z}{\omega}}\,dz,$$

$$\mathrm{A}_{-n}=\frac{1}{2\omega}\int_{\mathrm{CB}}f(z)\,e^{\frac{ni\pi z}{\omega}}\,dz.$$

3. Nous allons maintenant chercher les valeurs des intégrales qui entrent dans les expressions de A_n et de A_{-n}.

Supposons, pour fixer les idées, que la partie imaginaire de ω' soit positive, et considérons le parallélogramme DAA'D' dont les côtés DA et AA' sont égaux à 2ω et $2\omega'$ et qui contient à l'intérieur le pôle $a-2\alpha\omega'$. On trouve, en appliquant le théorème fondamental de la théorie des residus,

$$\int_{\mathrm{DA}}f(z)\,e^{-\frac{ni\pi z}{\omega}}\,dz+\int_{\mathrm{AA'}}f(z)\,e^{-\frac{ni\pi z}{\omega}}\,dz+\int_{\mathrm{A'D'}}f(z)\,e^{-\frac{ni\pi z}{\omega}}\,dz+\int_{\mathrm{D'D}}f(z)\,e^{-\frac{ni\pi z}{\omega}}\,dz$$
$$=2i\pi c^{-\alpha}ke^{-\frac{ni\pi}{\omega}(a-2\alpha\omega')}=2i\pi c^{-\alpha}kq^{2n\alpha}\,e^{-\frac{ni\pi a}{\omega}},$$

en posant $q=e^{\pi i\frac{\omega'}{\omega}}$; mais

$$\int_{\mathrm{AA'}}f(z)\,e^{-\frac{ni\pi z}{\omega}}\,dz=\int_{\mathrm{DD'}}f(z)\,e^{-\frac{ni\pi z}{\omega}}\,dz,$$

$$\int_{\mathrm{D'A'}}f(z)\,e^{-\frac{ni\pi z}{\omega}}\,dz=\int_{\mathrm{DA}}f(z+2\omega')\,e^{-\frac{ni\pi}{\omega}(z+2\omega')}\,dz=q^{-2n}c\int_{\mathrm{DA}}f(z)\,e^{-\frac{ni\pi z}{\omega}}\,dz;$$

donc

$$\int_{\mathrm{DA}} f(z)\, e^{-\frac{ni\pi z}{\omega}}\, dz = \frac{2i\pi k q^{2n\alpha} c^{-\alpha}}{1 - cq^{-2n}}\, e^{-\frac{ni\pi a}{\omega}},$$

et par conséquent

$$\mathrm{A}_n = \frac{i\pi k}{\omega} \cdot \frac{q^{2n\alpha} c^{-\alpha}}{1 - cq^{-2n}}\, e^{-\frac{ni\pi a}{\omega}}.$$

On trouve de la même manière, en considérant le parallélogramme C′B′BC, dont les côtés C′B′ et B′B sont égals à 2ω et $2\omega'$ et qui contient à l'intérieur le pôle $a + 2\beta\omega'$,

$$\int_{\mathrm{CB}} f(z)\, e^{\frac{ni\pi z}{\omega}}\, dz = \frac{2i\pi k q^{2n(1+\beta)} c^{1+\beta}}{1 - cq^{2n}}\, e^{\frac{ni\pi a}{\omega}},$$

et par conséquent

$$\mathrm{A}_{-n} = \frac{i\pi k}{\omega} \cdot \frac{q^{2n(1+\beta)} c^{1+\beta}}{1 - cq^{2n}}\, e^{\frac{ni\pi a}{\omega}}.$$

Nous avons donc la formule suivante

$$(1.)\quad \left\{ \begin{aligned} f(x) = \frac{i\pi k}{\omega} \Bigg[& \frac{c^{-\alpha}}{1-c} + \left(\frac{q^2}{c}\right)^{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2(n-1)\alpha}}{1 - cq^{-2n}}\, e^{\frac{ni\pi}{\omega}(x-a)} \\ & + (cq^2)^{\beta+1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2(n-1)(1+\beta)}}{1 - cq^{2n}}\, e^{-\frac{ni\pi}{\omega}(x-a)} \Bigg] \\ & - \frac{i\pi k}{2\omega} \sum_{m=-\alpha}^{m=\beta} c^m \left[1 + i \cot \frac{\pi}{2\omega}(x - a - 2m\omega') \right], \end{aligned} \right.$$

laquelle a lieu pour toutes les valeurs de x représentées par les points d'une zone infinie comprise entre les droites DA et CB.

4. Nous allons considérer les conséquences de cette formule. Mais, avant de le faire, nous introduirons, pour abréger le langage, les notations suivantes. Nous représenterons par K_m la droite qui passe par le pôle $a + 2m\omega'$ et qui fait un angle égal à l'argument de ω avec l'axe des abscisses; et nous représenterons par $(\mathrm{K}_m, \varepsilon)$ celui des demiplans qu'on obtient quand on coupe le plan de représentation de la variable x par la droite K_m, qui contient le point ε.

Cela posé, la première conséquence qu'on tire de la formule (1.) est la formule suivante, qu'on obtient en y posant $\alpha=0$ et $\beta=0$:

$$(2.)\qquad f(x)=\frac{i\pi k}{\omega}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{\frac{ni\pi}{\omega}(x-a)}}{1-cq^{-2n}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n}ce^{-\frac{ni\pi}{\omega}(x-a)}}{1-cq^{2n}}\right]-\frac{i\pi k}{2\omega}\left[1+i\cot\frac{\pi}{2\omega}(x-a)\right],$$

laquelle a lieu dans la zone comprise entre les droites K_{-1} et K_1.

De cette formule on tire une autre formule importante, en ayant égard au développement suivant:

$$\frac{1}{2}\left[1+i\cot\frac{\pi}{2\omega}(x-a)\right]=\frac{1}{1-e^{\frac{i\pi}{\omega}(x-a)}}=1+e^{\frac{i\pi}{\omega}(x-a)}+e^{\frac{2i\pi}{\omega}(x-a)}+e^{\frac{3i\pi}{\omega}(x-a)}+\ldots,$$

lequel a lieu dans le demi-plan $(K_0,\ a+2\omega')$, si l'on continue à supposer que l'argument de ω soit compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$. Cette autre formule est la suivante:

$$(3.)\qquad f(x)=\frac{i\pi k}{\omega}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c}{q^{2n}-c}e^{\frac{ni\pi}{\omega}(x-a)}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{cq^{2n}}{1-cq^{2n}}e^{-\frac{ni\pi}{\omega}(x-a)}\right],$$

valable dans la zone comprise entre les droites K_0 et K_1.

En ponsant $c=e^{-\frac{i\pi v}{\omega}}$ et en ayant égard aux relations

$$\frac{1}{1-cq^{-2n}}=\frac{e^{\frac{i\pi}{2\omega}(2n\omega'+v)}}{2i\sin\frac{\pi}{2\omega}(v+2n\omega')},$$

$$\frac{q^{2n}c}{1-cq^{2n}}=\frac{e^{\frac{i\pi}{2\omega}(2n\omega'-v)}}{2i\sin\frac{\pi}{2\omega}(v-2n\omega')},$$

$$1+i\cot\frac{\pi}{2\omega}(x-a)=i\frac{e^{-\frac{i\pi}{2\omega}(x-a)}}{\sin\frac{\pi}{2\omega}(x-a)},$$

on peut encore écrire les formules qu'on vient d'obtenir de la manière suivante:

$$f(x)=\frac{\pi k}{2\omega}\left[\sum_{n=0}^{\infty} e^{\frac{i\pi v}{2\omega}} \frac{e^{\frac{ni\pi}{\omega}(x-a+\omega')}}{\sin\frac{\pi}{2\omega}(v+2n\omega')}+\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{i\pi v}{2\omega}} \frac{e^{-\frac{ni\pi}{\omega}(x-a-\omega')}}{\sin\frac{\pi}{2\omega}(v-2n\omega')}+\frac{e^{-\frac{i\pi}{2\omega}(x-a)}}{\sin\frac{\pi}{2\omega}(x-a)}\right],$$

ou

$$(4.)\qquad f(x)=\frac{\pi k}{2\omega}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\varepsilon\frac{i\pi v}{2\omega}} \frac{e^{\frac{ni\pi}{\omega}(x-a+\varepsilon\omega')}}{\sin\frac{\pi}{2\omega}(v+2n\omega')}+\frac{e^{-\frac{i\pi}{2\omega}(x-a)}}{\sin\frac{\pi}{2\omega}(x-a)}\right],$$

où $\varepsilon=+1$, quand n est nul ou positif, et $\varepsilon=-1$, quand n est négatif; et

$$(5.)\qquad f(x)=\frac{\pi k}{2\omega} e^{-\frac{i\pi v}{2\omega}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{\frac{ni\pi}{\omega}(x-a-\omega')}}{\sin\frac{\pi}{2\omega}(v+2n\omega')}.$$

On tire de cette dernière formule, en y considérant v comme variable et en posant

$$f_1(x, v)=k^{-1} f(x, v),$$

les égalités

$$f_1(x, v+2\omega)=f_1(x, v),\quad f_1(x, v+2\omega')=e^{-\frac{i\pi}{\omega}(x-a)} f_1(x, v).$$

Donc $f_1(x, v)$ est aussi une fonction doublement périodique de v, de seconde espèce, dont les multiplicateurs sont 1 et $e^{-\frac{i\pi}{\omega}(x-a)}$, dont les périodes sont encore 2ω et $2\omega'$, et dont les pôles sont les nombres $2n\omega'$. La formule (5.) fait aussi voir que le résidu de $f_1(x, v)$ par rapport au pôle 0 est égal à l'unité. Nous avons donc encore la formule

$$(5'.)\qquad f(x)=\frac{\pi k}{2\omega} e^{-\frac{i\pi}{2\omega}(x-a)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{\frac{ni\pi}{\omega}(v-\omega')}}{\sin\frac{\pi}{2\omega}(x-a+2n\omega')},$$

valable pour toutes les valeurs de x et pour les valeurs de v représentées par les points de la zone comprise entre deux droites qui passent par les points d'affixe 0 e $2\omega'$ et dont l'inclinaison sur l'axe des abscisses est égale à l'argument de K; et la formule

$$(4'.)\qquad f(x)=\frac{\pi k}{2\omega}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\varepsilon\frac{i\pi}{2\omega}(x-a)}\frac{e^{\frac{ni\pi}{\omega}(v+\varepsilon\omega')}}{\sin\frac{\pi}{2\omega}(x-a+2n\omega')}+\frac{e^{\frac{i\pi v}{2\omega}}}{\sin\frac{\pi}{2\omega}v}\right],$$

valable aussi pour toutes les valeurs de x et pour les valeurs de v représentées par les points de la zone comprise entre deux parallèles aux droites antérieures, menées par les points d'affixe $-2\omega'$ et $2\omega'$.

Les formules qu'on vient d'obtenir sont équivalentes à des formules connues; nous ne nous y arrêterons donc plus, et nous passons à considérer celles qui résultent de (1.) en y posant $\alpha=\infty$, ou $\beta=\infty$.

5. Soit θ l'argument de cq^{2n}. On a alors

$$\begin{aligned}|1-cq^{2n}|=|1-|cq^{2n}|(\cos\theta+i\sin\theta)|&=\sqrt{1-2|c||q|^{2n}\cos\theta+|c|^2|q|^{4n}}\\&>\sqrt{1-2|c||q|^{2n}+|c|^2|q|^{4n}},\end{aligned}$$

et par conséquent

$$|1-cq^{2n}|^2>[1-|c||q|^{2n}]^2$$

ou

$$|1-cq^{2n}|>|1-|c||q|^{2n}|.$$

Mais, $|q|$ étant <1, nous pouvons donner à n_1 une valeur assez grande pour qu'on ait $|c||q^{2n}|<1$, quand $n\geqq n_1$; et alors on a

$$(\text{A.})\qquad |1-cq^{2n}|>1-|c||q|^{2n}\geqq 1-|c||q|^{2n_1}$$

quand $n\geqq n_1$.

Cela posé, considérons la série

$$\mathrm{S}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2(n-1)(1+\beta)}}{1-cq^{2n}}e^{-\frac{ni\pi}{\omega}(x-a)},$$

Mais si l'on a égard à la signification des symboles $S_{2m+2\nu}^{(\nu+1)}$ et $S_{2m+2\nu+2}^{(\nu)}$, on voit que

$$S_{2m+2\nu}^{(\nu+1)}+(2m+2\nu)^2\,S_{2m+2\nu}^{(\nu)}=S_{2m+2\nu+2}^{(\nu+1)}.$$

Donc on a

$$A_{2m+2\nu+2}=\frac{S_{2m+2\nu+2}^{(\nu+1)}}{(2m+1)\ldots(2m+2\nu+2)},$$

et l'on voit que la valeur de $A_{2m+2\nu+2}$ coïncide encore avec la valeur du coefficient de $\sin^{2m+2\nu+2}x$ dans la formule (1).

Au moyen de l'analyse qui précède, on voit que la formule (1) a lieu pour l'exposant $2m$ si elle a lieu pour l'exposant $2(m-1)$, et, par conséquent, si elle a lieu pour la fonction x^2. Mais cette formule, en y posant $m=1$ et en remarquant que

$$S_4^{(1)}=2^2,\quad S_6^{(2)}=2^2.4^2,\quad S_8^{(3)}=2^2.4^2.6^2,\quad\ldots,$$

donne la formule *connue*

$$x^2=\sin^2x+\frac{2}{3}.\frac{1}{2}\sin^4x+\frac{2.4}{3.5}.\frac{1}{3}\sin^6x+\ldots$$

La formule (1) est donc démontrée. De la même manière on vérifie la formule (2).

On tire de l'égalité (1), en la dérivant par rapport à x,

$$\frac{x^{2m-1}}{\cos x}=\sin^{2m-1}x\left[1+\frac{S_{2m+2}^{(1)}}{2m+1}\sin^2x+\frac{S_{2m+4}^{(2)}}{(2m+1)\ldots(2m+3)}\sin^4x+\ldots\right].$$

De l'égalité (2) on tire aussi

$$\frac{x^{2m}}{\cos x}=\sin^{2m}x\left[1+\frac{S_{2m+3}^{(1)}}{2m+2}\sin^2x+\frac{S_{2m+5}^{(2)}}{(2m+2)\ldots(2m+4)}\sin^4x+\ldots\right].$$

V

DÉMONSTRATION D'UNE FORMULE DE WARING

(Nouvelles Annales de Mathématiques — Paris, 1888, 3.e série, t. VII)

Dans un intéressant article intitulé: *Sur certaines fonctions symétriques; application au calcul de la somme des puissances semblables des racines d'une équation* [1], M. M. d'Ocagne calcule, au moyen de la théorie des fonctions symétriques, la fonction

$$\frac{1}{(x-x_1)^n}+\frac{1}{(x-x_2)^n}+\ldots+\frac{1}{(x-x_p)^n},$$

où x_1, x_2, ... représentent les racines de l'équation

$$U=A_0x^p+A_1x^{p-1}+\ldots+A_{p-1}x+A_p=0;$$

et ensuite déduit, du résultat auquel il arrive, une formule pour le calcul de la somme des puissances semblables des racines de cette équation, analogue à celle de Waring. Il part de l'identité

$$D_x\log U=\sum\frac{1}{x-x_\omega}$$

qui, étant dérivée $n-1$ fois par rapport à x, donne

$$\sum\frac{1}{(x-x_\omega)^n}=\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}D_x^n\log U.$$

[1] *Jornal de Sciencias mathematicas e astronomicas* (Coimbra, t. VII, p. 133).

ZZ

Le but de cette Note est de faire voir qu'on peut, par la méthode de M. M. d'Ocagne, obtenir la formule de Waring, en faisant usage, pour le calcul de $D_x^n \log U$, d'une formule différente de celle qu'il a employée, à savoir [1]

$$y^{(n)} = \sum \frac{n!\,\frac{d^i y}{du^i}\,(u')^\alpha (u'')^\beta \ldots (u^{(n)})^\lambda}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!\,(2!)^\beta (3!)^\gamma \ldots (n!)^\lambda},$$

où $\sum$ représente une somme qui se rapporte à toutes les solutions entières positives de l'équation

$$\alpha + 2\beta + \ldots + p\lambda = n,$$

et où

$$i = \alpha + \beta + \ldots + \lambda.$$

En effet, cette formule donne

$$D_x^n \log U = \sum (-1)^{i-1} \frac{n!\,(i-1)!\,U^{-i}\,U'^\alpha\,U''^\beta \ldots U^{(p)\lambda}}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!\,(2!)^\beta (3!)^\gamma \ldots (p!)^\lambda},$$

$$\alpha + 2\beta + \ldots + p\lambda = n,$$

$$i = \alpha + \beta + \ldots + \lambda,$$

parce que

$$U^{(p+1)} = U^{(p+2)} = \ldots = U^{(n)} = 0.$$

Nous avons donc

$$\sum \frac{1}{(x - x_\omega)^n} = (-1)^n n \sum (-1)^i \frac{(i-1)!\,U^{-i}\,U'^\alpha\,U''^\beta \ldots U^{(p)\lambda}}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!\,(2!)^\beta \ldots (p!)^\lambda}$$

et, en posant $x = 0$,

$$\sum \frac{1}{x_\omega^n} = n \sum (-1)^i \frac{(i-1)!\,U_0^{-i}\,U_0'^\alpha \ldots U_0^{(p)\lambda}}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!\,(2!)^\beta (3!)^\gamma \ldots (p!)^\lambda}$$

[1] Voir le *Calcul différentiel* de M. J. Bertrand, p. 308, ou mon *Curso de analyse infinitesimal*, t. I, 3.e ed., p. 242.

ou

$$\sum \frac{1}{x_\omega^n} = n \sum (-1)^i \frac{(i-1)!\, A_p^{-i}\, A_{p-1}^{\alpha}\, A_{p-2}^{\beta} \ldots A_0^{\lambda}}{\alpha!\, \beta! \ldots \lambda!}.$$

En appliquant maintenant cette formule à l'équation

$$A_p x^p + A_{p-1} x^{p-1} + \ldots + A_1 x + A_0 = 0,$$

dont les racines sont inverses des racines de l'équation proposée, on trouve la formule de Waring

$$\sum x_\omega^n = n \sum (-1)^i \frac{(i-1)!\, A_0^{-i}\, A_1^{\alpha}\, A_2^{\beta} \ldots A_p^{\lambda}}{\alpha!\, \beta! \ldots \lambda!},$$

où α, β, ..., λ sont les solutions entières positives de l'équation

$$\alpha + 2\beta + \ldots + p\lambda = n,$$

et où

$$i = \alpha + \beta + \ldots + \lambda.$$

VI

SUR L'INTÉGRALE $\int_0^\pi \cot(x-\alpha)\,dx$

(Nouvelles Annales de Mathématiques — Paris, 1889, 3.e série, t. VIII)

L'intégrale $\int_0^\pi \cot(x-\alpha)\,dx$, qui a une grande importance dans la théorie de l'intégration des fonctions rationnelles de $\sin x$ et $\cos x$, a été obtenue par M. Hermite dans son savant *Cours d'Analyse*, p. 344, au moyen d'une construction géométrique, et ensuite dans *Jornal de Sciencias mathematicas*, t. II, p. 65, au moyen d'une méthode entièrement élémentaire. Je me propose ici de considérer la même intégrale, pour l'obtenir par une autre méthode, aussi élémentaire, en la faisant dépendre de l'intégrale

$$\int_{x_0}^{x} \frac{f'(x)\,du}{1+[f(x)]^2}.$$

Soit $\alpha = a + ib$. On a

$$\int \cot(x-a-ib)\,dx = \int \frac{\cos(x-a-ib)}{\sin(x-a-ib)} = \int \frac{\cos(x-a)\cos ib + \sin(x-a)\sin ib}{\sin(x-a)\cos ib - \cos(x-a)\sin ib}\,dx,$$

où l'on doit remplacer $\sin ib$ et $\cos ib$ par leurs valeurs

$$\cos ib = \frac{e^{-b}+e^{b}}{2},$$

$$\sin ib = \frac{e^{-b}-e^{b}}{2i},$$

ce qui donne

$$\int \cot(x-a)\,dx = \int \frac{(e^{-b}+e^{b})\cos(x-a) - i\,(e^{-b}-e^{b})\sin(x-a)}{(e^{-b}+e^{b})\sin(x-a) + i\,(e^{-b}-e^{b})\cos(x-a)}\,dx$$

$$= \int \frac{2\sin 2(x-a)\,dx}{e^{-2b}+e^{2b}-2\cos 2(x-a)} - i\,\frac{(e^{-2b}-e^{2b})\,dx}{(e^{-b}+e^{b})^2\sin^2(x-a)+(e^{-b}-e^{b})^2\cos^2(x-a)}$$

$$= \frac{1}{2}\log\left[e^{-2b}+e^{2b}-2\cos(x-a)\right] - i\int \frac{d\left[\dfrac{e^{-b}+e^{b}}{e^{-b}-e^{b}}\operatorname{tang}(x-a)\right]}{1+\left[\dfrac{e^{-b}+e^{b}}{e^{-b}-e^{b}}\operatorname{tang}(x-a)\right]^2}.$$

Mais, comme on a $e^{-2b}+e^{2b}>2$, la fonction

$$\log\left[e^{-2b}+e^{2b}-2\cos 2(x-a)\right]$$

a une branche réelle qui prend des valeurs égales dans les points $x=0$ et $x=\pi$. Donc

$$\int_0^\pi \cot(x-a)\,dx = -i\int_0^\pi \frac{d\left[\dfrac{e^{-b}+e^{b}}{e^{-b}-e^{b}}\operatorname{tang}(x-a)\right]}{1+\left[\dfrac{e^{-b}+e^{b}}{e^{-b}-e^{b}}\operatorname{tang}(x-a)\right]^2}.$$

L'intégrale, qui entre dans le second membre de cette égalité, a la forme

$$\int_0^\pi \frac{f'(x)\,dx}{1+[f(x)]^2},$$

et nous allons par conséquent lui appliquer le théorème de Cauchy:

$$\int_0^\pi \frac{f'(x)\,dx}{1+[f(x)]^2} = \operatorname{arc\,tang} f(\pi) - \operatorname{arc\,tang} f(0) + (n-m)\,\pi,$$

où n représente le nombre de fois que $f(x)$ passe par l'infini en allant du positif au négatif, et m le nombre de fois que $f(x)$ passe par l'infini en allant du négatif au positif.

En y posant donc

$$f(x) = \frac{e^{-b}+e^{b}}{e^{-b}-e^{b}}\operatorname{tang}(x-a),$$

et en remarquant que, quand x varie depuis zéro jusqu'à π, $\operatorname{tang}(x-a)$ passe une seule fois par l'infini, en allant du positif au négatif, et que la fraction

$$\frac{e^{-b}+e^{b}}{e^{-b}-e^{b}}$$

est positive ou négative suivant que $b<0$ ou >0, on voit que $f(x)$ passe une seule fois par l'infini, en allant du positif au négatif quand $b<0$, et du négatif au positif quand $b>0$.

Nous avons donc

$$\int_0^\pi \cot(x-a)\,dx = i\pi$$

quand $b>0$, et

$$\int_0^\pi \cot(x-a)\,dx = -i\pi$$

quand $b<0$.

FIM DO VOLUME PRIMEIRO

INDICE

Paginas

I

II

Paginas

X

XI

XII

XIII

XIV